# Тема 2-16: Матрица Грама и определитель Грама

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть $V$ – евклидово или унитарное пространство, $A = (a_1, \ldots, a_m)$ – система векторов пространства $V$.

## Определения

*Матрицей Грама* системы векторов $A$ называется матрица, составленная из скалярных произведений $\begin{pmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \ldots & (a_1,a_m) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \ldots & (a_2,a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_m,a_1) & (a_m,a_2) & \ldots & (a_m,a_m) \end{pmatrix}$.

Обозначение: $G_A$.

*Определителем Грама* системы векторов $A$ называется определитель $|G_A|$.

Обозначение: $g_A$.

Следующие утверждения непосредственно следуют из определений.

## Наблюдения

1. Если $V$ – евклидово пространство, то $G_A^\top = G_A$ для любой системы $A$.
2. Если $V$ – унитарное пространство, то $\overline{G_A}^\top = G_A$ для любой системы $A$.
3. Система $A$ ортогональная $\Leftrightarrow$ $G_A$ – диагональная.
4. Система $A$ ортонормированная $\Leftrightarrow$ $G_A = E_m$.

Пусть $V$ – евклидово или унитарное пространство, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – произвольный базис пространства $V$.

**Теорема**

Для любых векторов $x, y \in V$ справедливо равенство

$$(x, y) = ([x]_B)^\top \cdot G_B \cdot \overline{[y]}_B. \tag{1}$$

$\Downarrow$ Запишем $x = \sum_{j=1}^n \xi_j b_j$, $y = \sum_{k=1}^n \eta_k b_k$. Тогда $(x, y) = (\sum_{j=1}^n \xi_j b_j, \sum_{k=1}^n \eta_k b_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\xi_j b_j, \eta_k b_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_j (b_j, b_k) \overline{\eta}_k = \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{k=1}^n (b_j, b_k) \overline{\eta}_k = (\xi_1, \ldots, \xi_n)(G_B \cdot \overline{[y]}_B) = ([x]_B)^\top \cdot G_B \cdot \overline{[y]}_B$, что и требуется доказать. $\Uparrow$

**Следствие**

Для любого ортонормированного базиса $B$ евклидова или унитарного пространства $V$ и любых векторов $x, y \in V$ справедливо равенство

$$(x, y) = ([x]_B)^\top \cdot \overline{[y]}_B. \tag{2}$$

Это непосредственно вытекает из наблюдения 4 сл.2.

# Пример

Базис $B$ евклидова пространства $V$ имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов $a_1, a_2$, заданных координатами в базисе $B$: $[a_1]_B = (1, 1, 1, 1)^\top$, $[a_2]_B = (1, -1, 1, -1)^\top$.

Ортогонализовать систему векторов означает найти ортогональный базис подпространства $\langle a_1, a_2 \rangle$. Вычислим $(a_1, a_2) = [a_1]_B^\top \cdot G_B \cdot [a_2]_B = (1, 1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot (1, -1, 1, -1)^\top =$ $(4, 5, 4, 8) \cdot (1, -1, 1, -1)^\top = -5$. Аналогично находим $(a_1, a_1) = (4, 5, 4, 8) \cdot (1, 1, 1, 1)^\top = 21$. Применяем процесс ортогонализации Грама-Шмидта: $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + \lambda b_1$, где $\lambda = -\dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \dfrac{5}{21}$. Вычисляем $[b_2]_B = (1, 1, 1, 1)^\top + \frac{5}{21}(1, -1, 1, -1)^\top = \frac{2}{21}(13, -8, 13, -8)^\top$. Подпространство $\langle a_1, a_2 \rangle$ имеет ортогональный базис $b_1, b_2$.

**Лемма**

Для любой системы векторов $(a_1, \dots, a_m)$ и любого скаляра $\lambda$ имеет место равенство $g_{(a_1,\dots,a_k,\dots,a_\ell,\dots,a_m)} = g_{(a_1,\dots,a_k+\lambda a_\ell,\dots,a_\ell,\dots,a_m)}$.

$\Downarrow$ Запишем $g_{(a_1,\dots,a_k+\lambda a_\ell,\dots,a_\ell,\dots,a_m)} =$

$$\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_k + \lambda a_\ell) & \dots & (a_1, a_\ell) & \dots & (a_1, a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k + \lambda a_\ell, a_1) & \dots & (a_k + \lambda a_\ell, a_k + \lambda a_\ell) & \dots & (a_k + \lambda a_\ell, a_\ell) & \dots & (a_k + \lambda a_\ell, a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_\ell, a_1) & \dots & (a_\ell, a_k + \lambda a_\ell) & \dots & (a_\ell, a_\ell) & \dots & (a_\ell, a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_m, a_1) & \dots & (a_m, a_k + \lambda a_\ell) & \dots & (a_m, a_\ell) & \dots & (a_m, a_m) \end{vmatrix}$$

и $g_{(a_1,\dots,a_k,\dots,a_\ell,\dots,a_m)} = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_k) & \dots & (a_1, a_\ell) & \dots & (a_1, a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & \dots & (a_k, a_k) & \dots & (a_k, a_\ell) & \dots & (a_k, a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_\ell, a_1) & \dots & (a_\ell, a_k) & \dots & (a_\ell, a_\ell) & \dots & (a_\ell, a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_m, a_1) & \dots & (a_m, a_k) & \dots & (a_m, a_\ell) & \dots & (a_m, a_m) \end{vmatrix}.$

# Окончание доказательства леммы

Так как $(a_k + \lambda a_\ell, a_j) = (a_k, a_j) + \lambda(a_\ell, a_j)$, $(a_j, a_k + \lambda a_\ell) = (a_j, a_k) + \overline{\lambda}(a_j, a_\ell)$ при $j \neq k$, и $(a_k + \lambda a_\ell, a_k + \lambda a_\ell) = (a_k, a_k) + \lambda(a_\ell, a_k) + \overline{\lambda}(a_k, a_\ell) + \lambda\overline{\lambda}(a_\ell, a_\ell)$, легко подсчитать, что определитель $g_{(a_{\mathbf{1}},\ldots,a_k+\lambda a_\ell,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)}$ получается из определителя $g_{(a_{\mathbf{1}},\ldots,a_k,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)}$ путем двух последовательных преобразований: сначала прибавления к $k$-й строке $\ell$-й строки, умноженной на $\lambda$, а затем прибавления к $k$-му столбцу $\ell$-го столбца, умноженного на $\overline{\lambda}$. $\Uparrow$

### Предложение

Если ортогональная система $(b_1, \dots, b_m)$ получена из системы $(a_1, \dots, a_m)$ с помощью процесса ортогонализации (сл.6-7 т.2-15), то $g_{(a_1,\dots,a_m)} = g_{(b_1,\dots,b_m)} = |b_1|^2 \dots |b_m|^2$.

$\Downarrow$ Первое равенство следует из леммы сл.5, так как каждый вектор в процессе ортогонализации получается с помощью цепочки преобразований, рассмотренных в указанной лемме: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m) = (b_1, a_2, a_3, \dots, a_m) \to (b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1, a_3, \dots, a_m) \to (b_1, b_2, a_3 + \gamma_{21} b_1, \dots, a_m) \to (b_1, b_2, a_3 + \gamma_{21} b_1 + \gamma_{32} b_2, \dots, a_m) \to \dots \to (b_1, b_2, b_3, \dots, b_m)$. Второе равенство следует из того, что в определителе $g_{(b_1,\dots,b_m)}$ элементы вне главной диагонали равны 0, а на главной диагонали расположены элементы $(b_j, b_j) = |b_j|^2$ $(j = 1, \dots, m)$. $\Uparrow$

### Следствие

Для любой системы векторов $(a_1, \dots, a_m)$ число $g_{(a_1,\dots,a_m)}$ – действительное неотрицательное и $g_{(a_1,\dots,a_m)} = 0$ тогда и только тогда, когда система $(a_1, \dots, a_m)$ линейно зависима.

$\Downarrow$ Первое утверждение следует из предложения; второе выполняется в силу предложения сл.17 т.2-15, так как в процессе ортогонализации из линейно независимой системы получается линейно независимая система, а из линейно зависимой – система, содержащая нулевой вектор. $\Uparrow$

Понятие параллелотопа обобщает понятия отрезка, параллелограмма, параллелепипеда.

## Определения

*Параллелотопом*, порожденным линейно независимой системой векторов $(a_1, \ldots, a_m)$ евклидова пространства, называется множество $\{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m | 0 \leq \lambda_j \leq 1\ (j = 1, \ldots, m)\}$.
*Объем параллелотопа* $V_{a_1,\ldots,a_m}$ определяется по индукции. База индукции: $V_{a_1} = |a_1|$. Шаг индукции: $V_{a_1,\ldots,a_m} = V_{a_1,\ldots,a_{m-1}} \cdot b_m$, где $b_m$ – ортогональная составляющая вектора $a_m$ относительно подпространства $\langle a_1, \ldots, a_{m-1} \rangle$.

## Предложение

Для любой линейно независимой системы $(a_1, \ldots, a_m)$ имеет место равенство $V_{a_1,\ldots,a_m} = \sqrt{g_{(a_1,\ldots,a_m)}}$.

$\Downarrow$ По предложению сл.17 т.2-15 при проведении процесса ортогонализации для системы $(a_1, \ldots, a_m)$ каждый вектор $b_j$ $(j = 2, \ldots, m)$ получающейся ортогональной системы является ортогональной составляющей вектора $a_j$ относительно подпространства $\langle a_1, \ldots, a_{j-1} \rangle$. Отсюда следует, что $V_{a_1,\ldots,a_m} = |b_1| \ldots |b_m|$. В силу предложения сл.7 получаем требуемое. $\Uparrow$

# Объем параллелотопа в ортонормированном базисе

## Предложение

Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ – ортонормированный базис евклидова пространства $V$, $(a_1, \dots, a_n)$ – линейно независимая система векторов из $V$, $A$ – матрица, составленная из столбцов координат $[a_j]_e$ векторов $a_j$ в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. Тогда $V_{a_1,\dots,a_n}$ равен модулю определителя матрицы $A$.

$\Downarrow$ В силу следствия сл.3 справедливо равенство $A^\top A = G_{(a_1,\dots,a_n)}$. Переходя к определителям, получаем $|A^\top \cdot A| = g_{(a_1,\dots,a_n)}$, откуда по теореме сл.25 т.1-7 и свойству 8 (сл.14 т.1-7) определителей получаем $g_{(a_1,\dots,a_n)} = |A^\top||A| = |A|^2$. Применение предложения сл.8 завершает доказательство. $\Uparrow$

В частности, получаем формулу $S = \mod \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ для вычисления площади параллелограмма на плоскости , построенного на векторах $\vec{a_1} = (\alpha_{11}, \alpha_{21})$, $\vec{a_2} = (\alpha_{12}, \alpha_{22})$, которые заданы координатами в ортонормированном базисе; эта же формула была получена на сл.20 т.1-14.

Формула для объема параллелепипеда известна из аналитической геометрии (получается с помощью смешанного произведения).

**Следствие**

Пусть $(a_1, \ldots, a_m)$ – линейно независимая система векторов евклидова пространства $V$, и $b$ – ортогональная составляющая вектора $a_m$ относительно подпространства $\langle a_1, \ldots, a_{m-1} \rangle$. Тогда $|b| = \sqrt{\dfrac{g_{(a_1,\ldots,a_m)}}{g_{(a_1,\ldots,a_{m-1})}}}$.

Это утверждение вытекает из определения объема параллелотопа, согласно которому $|b| = \dfrac{V_{a_1,\ldots,a_m}}{V_{a_1,\ldots,a_{m-1}}}$, и предложения сл.8.

Пусть $V$ – евклидово пространство размерности $n$.

### Определение

Два базиса $B$ и $C$ пространства $V$ называются *одинаково ориентированными*, если матрица перехода $T$ от базиса $B$ к $C$ имеет положительный определитель.

### Предложение

Отношение "быть одинаково ориентированными" является отношением эквивалентности на множестве всех базисов пространства $V$.

$\Downarrow$ Очевидно, что два одинаковых базиса одинаково ориентированы (матрица перехода – единичная), поэтому рассматриваемое отношение рефлексивно. Оно симметрично, так как матрица обратного перехода является обратной к матрице перехода (сл.16 т.2-3) и $|T^{-1}| = |T|^{-1}$ (сл.40 т.1-7), поэтому определители обеих матриц имеют одинаковый знак. Транзитивность обеспечивается тем, что если $B, C, D$ – базисы $V$ и $C = B \cdot T$, $D = C \cdot S$, то $D = B \cdot (T \cdot S)$, откуда следует, что $|T \cdot S| = |T||S| > 0$. $\Uparrow$

Множество всех базисов пространства $V$ разбивается на классы эквивалентности по отношению быть одинаково оринтированными. Зафиксируем базис $B$. Тогда для любого базиса $C$ матрица перехода $T_{B,C}$ имеет положительный или отрицательный определитель. Очевидно, что класс эквивалентности базиса $B$ состоит из всех базисов $C$, у которых $|T_{B,C}| > 0$. Все остальные базисы также образуют класс эквивалентости, так как если $C = BT_{B,C}$ и $D = BT_{B,D}$, то $D = CT_{B,C}^{-1}T_{B,D}$ и если $|T_{B,C}| < 0, |T_{B,D}| < 0$, то $|T_{B,C}^{-1}T_{B,D}| = |T_{B,C}|^{-1}|T_{B,D}| > 0$, т.е. $C$ и $D$ эквивалентны.
Итак, имеется точно два класса эквивалентности по отношению быть одинаково оринтированными базисами. Поэтому ориентацию пространства задают путем указания конкретного положительно ориентированного базиса. Например, в арифметическом евклидовом пространстве положительно ориентированным считается стандартный базис.

**Определение**

*Ориентация* конечномерного евклидова пространства задается путем указания конкретного базиса, который называется *положительно ориентированным*.

# Ориентированные флаги

## Определение

*Флагом* в конечномерном евклидовом пространстве $V$ называется цепочка подпространств $\{0_V\} \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ такая что $\dim V_k = k$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Каждый базис $(a_1, \ldots, a_n)$ пространства $V$ определяет флаг в этом пространстве: $\{0_V\} \subset \langle a_1 \rangle \subset \langle a_1, a_2 \rangle \ldots \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle \subset V$. Обратно, по каждому флагу можно построить базис, определяющий этот флаг: пусть $a_1$ – базис $V_1$ и $a_j \in V_j \backslash V_{j-1}$ при $j = 2, \ldots, n$.
Базис, определяющий флаг, задает на этом флаге ориентацию: каждое подпространство $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ ориентируется базисом $(a_1, \ldots, a_k)$.
Ориентированный флаг называется *орфлагом*.

**Предложение**

Пусть $(a_1, \dots, a_n)$ – базис евклидова пространства $V$ и $(b_1, \dots, b_n)$ – ортогональный базис, полученный из $(a_1, \dots, a_n)$ с помощью процесса ортогонализации. Тогда эти базисы определяют одинаковые орфлаги.

$\Downarrow$ По теореме сл.6 т.2-15 оба базиса определяют один и тот же флаг. Из способа построения векторов $b_k$ (сл.7 т.2-15) ясно, что матрица перехода от базиса $(a_1, \dots, a_k)$ к базису $(b_1, \dots, b_k)$ имеет единицы на главной диагонали и нули ниже ее, поэтому эти базисы ориентированы одинаково.$\Uparrow$

**Следствие**

Любой орфлаг конечномерного евклидова пространства определяется единственным ортонормированным базисом.

$\Downarrow$ Требуемый ортонормированный базис получается нормированием каждого вектора ортогонального базиса, упомянутый в предложении. Единственность следует из того, что в одномерном евклидовом пространстве имеется точно два различных ортонормированных базиса. $\Uparrow$

Пусть $V$ – евклидово пространство размерности $n$, и $(e_1, \ldots, e_n)$ – фиксированный ортонормированный базис $V$.

**Теорема**

Для любой линейно независимой системы векторов $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ пространства $V$ существует единственный вектор $b$ такой, что $b \in \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle^{\perp}$, $|b| = V_{a_1,\ldots,a_{n-1}}$ и базисы $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b)$ одинаково ориентированы.

$\Downarrow$ Запишем координаты векторов $[a_j] = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj})^{\top}$ $(j = 1, \ldots, n)$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Разложим определитель по последнему столбцу:
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,n-1} & \xi_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,n-1} & \xi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n,n-1} & \xi_n \end{vmatrix} = \Delta_1\xi_1 + \Delta_2\xi_2 + \ldots + \Delta_n\xi_n.$$ Так как первые $n-1$ столбцов определителя линейно независимы, среди алгебраических дополнений $\Delta_j$ по крайней мере одно не равно нулю. Положим $b = \Delta_1 e_1 + \Delta_2 e_2 + \ldots + \Delta_n e_n$. Имеем
$$(b, a_j) = \Delta_1\alpha_{j1} + \Delta_2\alpha_{j2} + \ldots + \Delta_n\alpha_{jn} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1j} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nj} \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $b \in \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}^{\perp} = \langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle^{\perp}$. Матрица перехода от базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к базису $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b)$ есть

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,n-1} & \Delta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,n-1} & \Delta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n,n-1} & \Delta_n \end{pmatrix}, \text{ ее определитель}$$

$|T| = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2 > 0$, поэтому базисы $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b)$ одинаково ориентированы. Далее, $b^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2$. Вычислим

$$|T^{\top} \cdot T| = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_{n-1}) & 0 \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_{n-1}) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_{n-1}, a_1) & (a_{n-1}, a_2) & \ldots & (a_{n-1}, a_{n-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2 \end{vmatrix}. \text{ Таким}$$

образом, $|T|^2 = |T^{\top} \cdot T| = g_{(a_1, \ldots, a_{n-1})} b^2 = V^2_{a_1, \ldots, a_{n-1}} b^2$. Так как $|T| = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2 = b^2$, заключаем, что $b^2 = V^2_{a_1, \ldots, a_{n-1}}$, т.е. $|b| = V_{a_1, \ldots, a_{n-1}}$.

Единственность вектора $b$ вытекает из того, что в одномерном пространстве существует точно два (противоположных) вектора одной и той же ненулевой длины, а условие, что базис, содержащий один из них, имеет данную ориентацию, выделяет точно один из этих векторов.

Доказательство теоремы закончено. $\Uparrow$

## Определение

Пусть $V$ – евклидово пространство размерности $n$, и $(e_1, \ldots, e_n)$ – фиксированный ортонормированный базис $V$, определяющий положительную ориентацию. Если система векторов $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ пространства $V$ линейно зависима, то *обобщенное векторное произведение* ее векторов равно $0_V$. Если система векторов $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ пространства $V$ линейно независима, то обобщенное векторное произведение ее векторов равно вектору $b$, построенному в теореме сл.15: $b \in \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle^{\perp}$, $|b| = V_{a_1,\ldots,a_{n-1}}$ и базис $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b)$ положительно ориентирован. Обозначение: $a_1 \times \ldots \times a_{n-1}$.

Вычислять обобщенное векторное произведение векторов $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ по их координатам $(a_j = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj}),\ j = 1, \ldots, n)$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ удобно, разлагая символический определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,n-1} & e_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,n-1} & e_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n,n-1} & e_n \end{vmatrix}$$

по последнему столбцу.

**Предложение**

1. Обобщенное векторное произведение антикоммутативно по любой паре аргументов.
2. Обобщенное векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда его аргументы линейно зависимы.
3. Обобщенное векторное произведение линейно по любому аргументу.

$\Downarrow$ Все перечисленные свойства получаются из определения обобщенного векторного произведения с помощью определителя применением свойств определителя, касающихся его столбцов.$\Uparrow$

## Пример

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ вычислить $b = a_1 \times a_2 \times a_3$ для векторов $a_1 = (1,2,3,4)$, $a_2 = (3,4,5,6)$, $a_3 = (2,3,5,4)$.

Запишем символический определитель и разложим его по последнему столбцу: 
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & e_1 \\ 2 & 4 & 3 & e_2 \\ 3 & 5 & 5 & e_3 \\ 4 & 6 & 4 & e_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} e_2 - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} e_3 + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} e_4 = -6e_1 + 10e_2 - 2e_3 - 2e_4.$$
Таким образом, $b = (-6, 10, -2, -2)$.

В 3-мерном евклидовом пространстве $V_g$ обобщенное векторное произведение совпадает с векторным произведением, рассматривавшимся в аналитической геометрии. Мы получаем еще одну формулу для вычисления координат векторного произведения в правом ортонормированном базисе: координаты векторного произведения векторов $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ их векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \vec{e}_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \vec{e}_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}$. Этот определитель равен определителю $\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$, с помощью которого вычисляются координаты векторного произведения в аналитической геометрии.