Тема 2-13: Корневое разложение для линейного оператора

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть V – линейное пространство над полем F, $\dim V = n$, $\mathcal{A}$ – линейный оператор на пространстве V. Так как $\mathcal{A}^{k+1}v = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k v)$ для любого $v \in V$, имеем $\mathrm{Ker}\mathcal{A}^k \subseteq \mathrm{Ker}\mathcal{A}^{k+1}$ для любого натурального k. Кроме того, ясно, что $\mathrm{Im}\mathcal{A}^k \supseteq \mathrm{Im}\mathcal{A}^{k+1}$. Предположим, что $\{0_V\} \subset \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Так как $\mathrm{d}(\mathcal{A}) + \mathrm{r}(\mathcal{A}) = n$, имеет место включение $V \supset \mathrm{Im}\mathcal{A}$. Получаем две цепочки включений подпространств

$$\begin{gathered}\{0_V\} \subset \mathrm{Ker}\mathcal{A} \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}\mathcal{A}^s = \mathrm{Ker}\mathcal{A}^{s+1} = \mathrm{Ker}\mathcal{A}^{s+2} = \ldots \\ V \supset \mathrm{Im}\mathcal{A} \supset \ldots \supset \mathrm{Im}\mathcal{A}^s = \mathrm{Im}\mathcal{A}^{s+1} = \mathrm{Im}\mathcal{A}^{s+2} = \ldots\end{gathered} \tag{1}$$

Так как $\dim V = n$, существует наименьшее натуральное число s, для которого имеет место равенство $\mathrm{Im}\mathcal{A}^s = \mathrm{Im}\mathcal{A}^{s+1}$. Тогда предыдущие включения являются строгими. Покажем, что для любого натурального k имеет место $\mathrm{Im}\mathcal{A}^{s+k} = \mathrm{Im}\mathcal{A}^s$. Используем индукцию по k. База индукции очевидна. Шаг индукции: $\mathrm{Im}\mathcal{A}^{s+k} = \mathcal{A}(\mathrm{Im}\mathcal{A}^{s+k-1}) = \mathcal{A}(\mathrm{Im}\mathcal{A}^s) = \mathrm{Im}\mathcal{A}^{s+1} = \mathrm{Im}\mathcal{A}^s$. Покажем, что $\mathrm{Ker}\mathcal{A}^{s+k} = \mathrm{Ker}\mathcal{A}^s$. Так как $\mathrm{d}(\mathcal{A}^m) + \mathrm{r}(\mathcal{A}^m) = n$ при любом натуральном m и $\mathrm{r}(\mathcal{A}^{s+k}) = \mathrm{r}(\mathcal{A}^s)$, имеем $\mathrm{d}(\mathcal{A}^{s+k}) = \mathrm{d}(\mathcal{A}^s)$. Поскольку $\mathrm{Ker}\mathcal{A}^{s+k} \supseteq \mathrm{Ker}\mathcal{A}^s$, получаем требуемое. Положим

$$U_{\mathcal{A}} = \mathrm{Im}\mathcal{A}^s,\ N_{\mathcal{A}} = \mathrm{Ker}\mathcal{A}^s. \tag{2}$$

Теорема

Пусть V – линейное пространство над полем F, $\dim V = n$, $\mathcal{A}$ – линейный оператор на пространстве V и $\{0_V\} \subset \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Тогда $U_{\mathcal{A}}$ и $N_{\mathcal{A}}$ – инвариантные подпространства относительно $\mathcal{A}$, $V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ и ограничение $\mathcal{A}|_{U_{\mathcal{A}}}$ есть изоморфизм, а ограничение $\mathcal{A}|_{N_{\mathcal{A}}}$ – нильпотентный оператор.

$\Downarrow$ В силу равенств (2) и наблюдения сл.11 т.2-10 подпространства $U_{\mathcal{A}}$ и $N_{\mathcal{A}}$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$. По определению $N_{\mathcal{A}}$ имеем $(\mathcal{A}|_{N_{\mathcal{A}}})^s = \mathcal{O}$, т.е. $\mathcal{A}|_{N_{\mathcal{A}}}$ – нильпотентный оператор. Так как $\mathcal{A}(U_{\mathcal{A}}) = U_{\mathcal{A}}$, в силу теоремы сл.15 т.2-8 $\mathcal{A}|_{U_{\mathcal{A}}}$ есть изоморфизм.
Чтобы доказать равенство $V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$, заметим, что $\dim V = \mathrm{d}(\mathcal{A}^s) + \mathrm{r}(\mathcal{A}^s) = \dim N_{\mathcal{A}} + \dim U_{\mathcal{A}}$. Остается убедиться, что сумма $U_{\mathcal{A}} + N_{\mathcal{A}} \subseteq V$ – прямая, т.е. по теореме сл.19 т.2-4 что $N_{\mathcal{A}} \cap U_{\mathcal{A}} = \{0_V\}$. Так как $\mathcal{A}^s(U_{\mathcal{A}}) = \mathcal{A}^s(\mathrm{Im}\mathcal{A}^s) = \mathrm{Im}\mathcal{A}^{2s} = \mathrm{Im}\mathcal{A}^s = U_{\mathcal{A}}$ в силу (1), $\mathcal{A}^s|_{U_{\mathcal{A}}}$ – изоморфизм, поэтому $\mathrm{Ker}\mathcal{A}^s \cap U_{\mathcal{A}} = \{0_V\}$ и $N_{\mathcal{A}} \cap U_{\mathcal{A}} = \{0_V\}$. Теорема доказана. $\Uparrow$

Определение

Равенство $V = U_{\mathcal{A}} \oplus N_{\mathcal{A}}$ называется *разложением Фиттинга* линейного пространства V относительно линейного оператора $\mathcal{A}$.

Предложение

1. Если W – подпространство V такое что $\mathcal{A}W = W$, то $W \subseteq U_{\mathcal{A}}$.
2. Пусть $d = \dim N_{\mathcal{A}}$. Тогда $\chi_{\mathcal{A}} = (-1)^d x^d \chi_{\mathcal{A}_{U_{\mathcal{A}}}}$, причем $\chi_{\mathcal{A}_{U_{\mathcal{A}}}}(0) \neq 0$.

$\Downarrow$ Если $\mathcal{A}W = W$, то для любого натурального k имеем $W = \mathcal{A}W = \mathcal{A}^2 W = \ldots = \mathcal{A}^k W$. В частности, $W = \mathcal{A}^s W \subseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^s = U_{\mathcal{A}}$, и утверждение 1 доказано.
Для доказательства утверждения 2 заметим, что согласно следствию сл.9 т.2-10 $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_{N_{\mathcal{A}}}} \chi_{\mathcal{A}_{U_{\mathcal{A}}}}$, а по теореме сл.12 т.2-12 $\chi_{\mathcal{A}_{N_{\mathcal{A}}}} = (-1)^d x^d$. Так как $\mathcal{A}|_{U_{\mathcal{A}}}$ – изоморфизм, его матрица в любом базисе невырожденная, а определитель этой матрицы является свободным членом характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}_{U_{\mathcal{A}}}}$. $\Uparrow$

Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n$, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$,

$$\chi_{\mathcal{A}} = (-1)^n (x-\lambda_1)^{k_1} \dots (x-\lambda_m)^{k_m}, \tag{3}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$ – различные скаляры, $k_1 + \dots + k_m = n$. Положим $\mathcal{A}_j = \mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E}$ $(j = 1, \dots, m)$. Так как λ_j – собственное значение линейного оператора $\mathcal{A}$, $\{0_V\} \subset \mathrm{Ker}\mathcal{A}_j$. Положим $V(\mathcal{A}, \lambda_j) = N_{\mathcal{A}_j}$. В силу наблюдения сл.11 т.2-10 $V(\mathcal{A}, \lambda_j)$ является инвариантным относительно $\mathcal{A}$ подпространством.

Определение

Корневым подпространством относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению λ_j, называется $V(\mathcal{A}, \lambda_j)$.

Теорема

Выполняются следующие условия:

1. $\dim V(\mathcal{A}, \lambda_j) = k_j$ $(j = 1, \dots, m)$,
2. $V(\mathcal{A}, \lambda_j) \subseteq U_{\mathcal{A}_i}$ при $i \neq j$,
3. $V = V(\mathcal{A}, \lambda_1) \oplus V(\mathcal{A}, \lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\mathcal{A}, \lambda_m)$.

Нам потребуется следующая

Лемма

Для любого скаляра λ имеет место равенство $\chi_{\mathcal{A}}(x) = \chi_{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})}(x-\lambda)$.

$\Downarrow$ Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. Тогда оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ имеет в этом базисе матрицу $A - \lambda E_n$. Имеем $\chi_{\mathcal{A}}(x) = |A - xE_n|$, $\chi_{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})}(x-\lambda) = |(A - \lambda E_n) - (x-\lambda)E_n| = |A - xE_n|$, что и требуется доказать. $\Uparrow$

$\Downarrow$ Докажем утверждение 1. Так как $U_{\mathcal{A}_j}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}_j$, обозначим через $\mathcal{A}'$ ограничение $\mathcal{A}_j$ на $U_{\mathcal{A}_j}$. Пусть $d = \dim V(\mathcal{A}, \lambda_j)$. Согласно утверждению 2 предложения сл.4 имеем $\chi_{\mathcal{A}_j}(x) = (-1)^d x^d \chi_{\mathcal{A}'}(x)$, причем $\chi_{\mathcal{A}'}(0) \neq 0$. По лемме $\chi_{\mathcal{A}}(x) = (-1)^d (x-\lambda_j)^d \chi_{\mathcal{A}'}(x-\lambda_j)$. Сравнивая это равенство с (3), заключаем, что $d = k_j$.

Докажем утверждение 2. Для этого проверим, что $N_{\mathcal{A}_i} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A}_j = \{0_V\}$. Пусть $v \in N_{\mathcal{A}_i} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A}_j$. Так как $v \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}_j$, имеем $\mathcal{A}v = \lambda_j v$. Пусть $N_{\mathcal{A}_i} = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_i)^s$. Тогда $\mathcal{A}_i v = (\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})v = (\lambda_j - \lambda_i)v$, и $0_V = (\mathcal{A}_i)^s v = (\lambda_j - \lambda_i)^s v$. Поскольку $\lambda_j \neq \lambda_i$, заключаем, что $v = 0_V$. Из предложения сл.13 т.2-10 следует, что $\mathcal{A}_j(N_{\mathcal{A}_i}) = N_{\mathcal{A}_i}$. Утверждение 1 предложения сл.4 доказывает утверждение 2.

Окончание доказательства

Докажем утверждение 3. В силу утверждения 2 имеем $\sum_{j \neq i} V(\mathcal{A}, \lambda_j) \subseteq U_{\mathcal{A}_i}$, т.е. $V(\mathcal{A}, \lambda_i) \cap \sum_{j \neq i} V(\mathcal{A}, \lambda_j) = \{0_V\}$. Из теоремы сл.23 т.2-4 следует, что сумма $\sum_{j=1}^{m} V(\mathcal{A}, \lambda_j)$ является прямой. Она очевидным образом является подпространством пространства V. Согласно упомянутой теореме размерность прямой суммы равна сумме размерностей подпространств $V(\mathcal{A}, \lambda_j)$. В силу утверждения 1 эта сумма равна n, т.е. размерности пространства V. Утверждение 3 доказано. $\Uparrow$

Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n$, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$, характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$ определяется равенством (3) сл.5. Ограничение оператора $\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{E}$ на корневое подпространство $V(\mathcal{A}, \lambda_j)$ является нильпотентным оператором, поэтому в силу теоремы сл.9 т.2-12 для этого ограничения существует жорданов базис в $V(\mathcal{A}, \lambda_j)$.

Определение

Жордановым базисом линейного пространства V относительно линейного оператора $\mathcal{A}$ называется базис, полученный объединением жордановых базисов в корневых подпространствах $V(\mathcal{A}, \lambda_j)$ относительно ограничений операторов $\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{E}$ при $j = 1, \ldots, m$.

Пусть $B_j = (b_{11}^{(j)}, \ldots, b_{1t_1}^{(j)}; b_{21}^{(j)}, \ldots, b_{2t_2}^{(j)}; \ldots; b_{p_j1}^{(j)}, \ldots, b_{p_jt_{p_j}}^{(j)})$ – жорданов базис в корневом подпространстве $V(\mathcal{A}, \lambda_j)$ относительно ограничения оператора $\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{E}$ на это подпространство, разбитый на нильслои. Каждый нильслой порождает подпространство $U_{jq} = \langle b_{q1}^{(j)}, \ldots, b_{qt_q}^{(j)} \rangle$ $(q = 1, \ldots, p_j)$, инвариантное относительно $\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{E}$ в силу утверждения 2 предложения сл.4 т.2-12 и потому инвариантное относительно $\mathcal{A}$ в силу следствия сл.12 т.2-10. Обозначим через A_{jq} матрицу ограничения $\mathcal{A}|_{U_{jq}}$ в базисе $(b_{q1}^{(j)}, \ldots, b_{qt_q}^{(j)})$, а через A_j – матрицу $\mathcal{A}|_{V(\mathcal{A},\lambda_j)}$ в базисе B_j. Наконец, пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в жордановом базисе $\cup_{j=1}^{m} B_j$.

Так как $V = \oplus_{j=1}^{m} V(\mathcal{A}, \lambda_j)$ и $V(\mathcal{A}, \lambda_j) = \oplus_{q=1}^{p_j} U_{jq}$, в силу следствия сл.9 т.2-10 имеют место равенства

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & A_m \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} A_{j1} & O & \dots & O \\ O & A_{j2} & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & A_{jp_j} \end{pmatrix}.$$

Остается выяснить вид матрицы A_{jq}, т.е. матрицы ограничения оператора $\mathcal{A}$ на линейную оболочку $\langle b_1, \dots, b_s \rangle$ нильслоя в корневом подпространстве $V(\mathcal{A}, \lambda)$. Так как $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})b_\ell = b_{\ell+1}$ при $\ell = 1, \dots, s-1$ и $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})b_s = 0_V$, имеем $\mathcal{A}b_\ell = \lambda b_\ell + b_{\ell+1}$ при $\ell = 1, \dots, s-1$ и $\mathcal{A}b_s = \lambda b_s$. Итак,

$$\mathcal{A}|_{\langle b_1, \dots, b_s \rangle} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Определение

Матрица вида (4) называется *клеткой Жордана* порядка s, относящейся к скаляру λ и обозначается через $J(\lambda, s)$.

Матрица оператора в жордановом базисе (1)

Теорема

Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n$, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$, характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$ определяется равенством (3) сл.5. Тогда V имеет жорданов базис относительно линейного оператора $\mathcal{A}$. Оператор $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет блочно-диагональной матрицу, на главной диагонали которой стоят клетки Жордана, относящиеся к собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, причем для каждого собственного значения сумма порядков клеток Жордана, относящихся к этому значению, равна его кратности.
Любые две матрицы оператора $\mathcal{A}$, имеющие указанный вид, отличаются друг от друга только порядком клеток Жордана на главной диагонали.

Существование жорданова базиса и утверждение о виде матрицы в этом базисе уже доказаны выше. Последнее утверждение теоремы следует из следствия сл.14 т.2-12.
Из следствия 2 сл.6 т.1-10 вытекает

Следствие

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\dim V = n$, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$. Тогда V имеет жорданов базис относительно линейного оператора $\mathcal{A}$ и выполняются все утверждения теоремы о матрице оператора $\mathcal{A}$.

Пусть $A \in F^{n\times n}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$, у которого характеристический многочлен разлагается на линейные множители, в некотором базисе.

Если собственное значение λ_1 у оператора $\mathcal{A}$ единственное, то оператор $\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}$ – нильпотентный и к матрице $A_1 = A - \lambda_1 E_n$ применяем алгоритм сл.15 т.2-12. Пусть $\mathcal{A}$ имеет более одного собственного значения. Выберем собственное значение λ_1 и вычислим матрицу $A_1 = A - \lambda_1 E_n$. Выпишем матрицу $(E_n|A_1^\top)$, затем приведем ее с помощью элементарных преобразований (длинных) строк к виду $(E'|A_1')$, где A_1' – ступенчатая по строкам матрица. Затем запишем матрицу $(E'|A_1'|A_1' \cdot A_1^\top)$ и приведем ее с помощью элементарных преобразований (длинных) строк к виду $(E''|A_1''|A_1''')$, где A_1''' – ступенчатая по строкам матрица. Продолжаем этот процесс, пока ранг последней матрицы $A_1^{(p)}$ не будет равен $\mathrm{r}(A_1^{(p-1)})$ или количество нулевых строк матрицы $A_1^{(p)}$ равно кратности λ_1 как корня характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$. Тогда базис корневого подпространства $V(\mathcal{A}, \lambda_1)$ образуют векторы из первой матрицы (на месте E_n), имеющие нулевые окончания в последней матрице.

Окончание описания алгоритма см. на следующем слайде.

Пусть собственное значение $\lambda_2 \neq \lambda_1$ и $A_2 = A - \lambda_2 E_n$. Положим $B = A_1^{(p)}$ – это последняя матрица, полученная на предыдущем шаге. Вычислим матрицу $B_1 = B \cdot A_2^{\top}$ и выпишем матрицу $(B|B_1)$, затем приведем ее с помощью элементарных преобразований (длинных) строк к виду $(B'|B_1')$, где B_1' – ступенчатая по строкам матрица.
Далее повторяем действия, описанные выше для матрицы A_1, проверяя условие окончания по равенству рангов последней и предпоследней матриц или по равенству количества нулевых строк последней матрицы кратности корня λ_2. Тогда базис корневого подпространства $V(\mathcal{A}, \lambda_2)$ образуют векторы из первой матрицы (на месте матрицы B), имеющие нулевые окончания в последней матрице.
Продолжаем описанные действия, пока не дойдем до последнего собственного значения λ_m. Базис последнего корневого подпространства составляют ненулевые строки последней матрицы ступенчатого вида, полученной для предпоследнего собственного значения.

Обоснование алгоритма следует из обоснования ЯО алгоритма (сл.8-9 т.2-8). Мы находим сначала базис образа оператора $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}$, затем базис образа $\mathcal{A}_1^2$, и так далее, до тех пор пока не будет выполнено одно из условий $\mathrm{r}(\mathcal{A}_1^s) = \mathrm{r}(\mathcal{A}_1^{s+1})$ или $\mathrm{d}(\mathcal{A}_1^s) = k_1$ – кратность λ_1. Ненулевые строки полученной при этом последней матрицы $A^{(p)}$ (приведенной к ступенчатому виду) образуют базис $\mathrm{Im}\mathcal{A}_1^s = \mathrm{Im}\mathcal{A}_1^{s+1}$. Это подпространство содержит корневые подпространства для всех собственных значений, кроме λ_1. Умножая матрицу $A^{(p)}$ на A_2, мы находим образы базисных векторов $\mathrm{Im}\mathcal{A}_1^s$ при операторе $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{E}$ и затем фактически снова применяем ЯО алгоритм: приписываем к векторам их образы и приводим правую матрицу к ступенчатому виду. После выполнения действий для предпоследнего собственного значения получаем образ оператора, совпадающий с последним корневым подпространством.

Найти базисы корневых подпространств линейного оператора $\mathcal{A}$,

заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ (к 4-й строке прибавляем 3-ю, умноженную на -2; затем из 2-го столбца вычитаем 4-й, к 3-му прибавляем 4-й и выносим из 2-го столбца x, прибавляем к 4-й строке 2-ю и разлагаем по 2-му столбцу).

$$\begin{vmatrix} -x & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1-x & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -x & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -3-x & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1-x & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -x & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3+2x & -1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -x & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -x-1 & -1 & 2 \\ 3 & x & 2+x & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -x-1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2+x & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$x \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -x-1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2+x & -2-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -x-1 & -1 & 2 \\ 1 & 2+x & -2-x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} =$$

Прибавили 2-й столбец к 3-му, применили теорему Лапласа к 1-й и 3-й строкам.

$$= -x\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -x-1 & -x-2 & 2 \\ 1 & 2+x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$-x\left(\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+1+2} \begin{vmatrix} -x-2 & 2 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix}\right) =$$

$x(-x^2-2x-1)(x^2+x-2+2) = -x^2(x+1)^3$. Таким образом, оператор имеет два собственных значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -1$.

Найдем базис корневого подпространства $V(\mathcal{A}, 0)$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Пример (2)

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 8 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем нули в первом, и затем во втором столбце третьей матрицы

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -2 & -5 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 1 & -4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 4 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|rrrrr|rrrrr} 1 & -4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 7 & 4 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 16 & 9 & 0 & 4 & 2 & 1 & -4 & -9 & -3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Заканчиваем преобразование матрицы, так как в третьей части матрицы получилось 2 нулевых строки и кратность корня λ_1 равна двум. Базис корневого подпространства $V(\mathcal{A}, 0)$ (равного $\mathrm{Ker}\mathcal{A}^2$) состоит из векторов $a_1 = (0, 2, 1, 0, 1)$, $a_2 = (0, -1, 0, 1, 0)$. Так как $V(\mathcal{A}, -1) = \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$, его базис состоит из векторов $b_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $b_2 = (0, 1, 1, 0, 0)$, $b_3 = (0, 0, 0, 2, 1)$.

Найти жорданов базис относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Базисы корневых подпространств найдены на сл.17. Рассматривая базис корневого подпространства $V(\mathcal{A}, 0)$, заключаем, что векторы $a_1 = (0, 2, 1, 0, 1)$, $a_2 = (0, -1, 0, 1, 0)$ образуют нильслой и потому образуют жорданов базис в $V(\mathcal{A}, 0)$.
Преобразуем базис $b_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $b_2 = (0, 1, 1, 0, 0)$, $b_3 = (0, 0, 0, 2, 1)$:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем образы полученных векторов при действии оператора $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} + \mathcal{E}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу, записывая за вектором его образ при $\mathcal{A}_2$, и преобразуем правую матрицу, приводя ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда получаем нильслой $c_1 = (0,1,1,0,0)$, $c_2 = (1,1,0,0,0)$, $c_3 = (0,-2,-2,-2,-1)$. Таким образом, жорданов базис относительно оператора $\mathcal{A}$: $a_1 = (0,2,1,0,1)$, $a_2 = (0,-1,0,1,0)$, $c_1 = (0,1,1,0,0)$, $c_2 = (1,1,0,0,0)$, $c_3 = (0,-2,-2,-2,-1)$. Относительно этого базиса оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Пусть F – поле, матрица $A \in F^{n \times n}$ имеет характеристический многочлен, разложимый на линейные множители. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства F_n, заданный матрицей A в базисе из столбцов единичной матрицы. Для этого оператора существует жорданов базис. В этом базисе $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональную матрицу A' с клетками Жордана на главной диагонали. Эта матрица подобна матрице A.

Определение

Блочно-диагональная матрица с клетками Жордана на главной диагонали, подобная данной матрице $A \in F^{n \times n}$, называется *жордановой нормальной формой* матрицы A.

Теорема

Матрица $A \in F^{n \times n}$ имеет жорданову нормальную форму тогда и только тогда, когда ее характеристический многочлен разлагается на линейные множители. При этом жорданова нормальная форма матрицы определяется однозначно с точностью до перестановки клеток Жордана на главной диагонали.

Очевидно, что характеристический многочлен жордановой нормальной формы разлагается на линейные множители. Из этого следует первое утверждение. Второе утверждение следует из теоремы сл.10.

Из следствия 2 сл.6 т.1-10 и теоремы сл.20 вытекает

Теорема

Любая квадратная матрица с комплексными элементами имеет жорданову нормальную форму.

Найти жорданову нормальную форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись вычислениями сл.14-19, получаем

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$, где T – матрица перехода, полученная из жорданова базиса $a_1 = (0, 2, 1, 0, 1)$, $a_2 = (0, -1, 0, 1, 0)$, $c_1 = (0, 1, 1, 0, 0)$, $c_2 = (1, 1, 0, 0, 0)$, $c_3 = (0, -2, -2, -2, -1)$:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисление собственных векторов с использованием алгоритма нахождения базисов корневых подпространств

Пусть $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ – линейный оператор простой структуры (определение на сл.12 т.2-11) на линейном пространстве V, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – его различные собственные значения. Корневые подпространства оператора $\mathcal{A}$ являются ядрами операторов $\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E}$ при $j = 1, \ldots, m$. Подпространства $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E})$ при $j = 1, \ldots, m$ удобно искать с помощью алгоритма нахождения базисов корневых подпространств. При этом полезно следующее утверждение, вытекающее из утверждения 2 теоремы сл.5.

Предложение

Если линейный оператор $\mathcal{A}$ простой структуры имеет точно два различных собственных значения λ_1, λ_2, то $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) = \mathrm{Im}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})$ и $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E}) = \mathrm{Im}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})$.

Начинать поиск корневых подпространств при нахождении собственных векторов рекомендуется с собственного значения наибольшей кратности.

Найти собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдем характеристический многочлен (к 2-му столбцу прибавляем 1-й, выносим из 2-го столбца $-(x+1)$, затем из 2-й строки вычитаем 1-ю, разлагаем по 2-му столбцу и затем по 1-му столбцу):

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = \begin{vmatrix} -x & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1-x & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2-x & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & -1-x & 0 & 2 \\ 0 & -1-x & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2-x & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1-x \end{vmatrix} =$$

$$-(x+1)\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2-x & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = -(x+1)\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 2 \\ x & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2-x & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1-x \end{vmatrix} =$$

$$(x+1)\begin{vmatrix} x & -2 & 2 \\ 0 & -2-x & 2 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = (x+1)\left(x\begin{vmatrix} -2-x & 2 \\ 1 & -1-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2-x & 2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$(x+1)(x(x^2+3x)+2x) = (x+1)x(x^2+3x+2) = (x+1)^2x(x+2).$$

Таким образом, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -2$.

Пример нахождения собственных векторов с использованием алгоритма нахождения базисов корневых подпространств (1)

Найдем базис $V(\mathcal{A},\lambda_1)$ (начинаем с наибольшей кратности).

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Видим, что $V(\mathcal{A},\lambda_1)=\mathrm{Ker}(\mathcal{A}+\mathcal{E})$ и его базис образуют векторы $a_1 = (-2,0,2,1)$ и $a_2=(1,1,0,0)$; $V(\mathcal{A},\lambda_2)\oplus V(\mathcal{A},\lambda_3)=\mathrm{Im}(\mathcal{A}+\mathcal{E})$ и это подпространство имеет базис из векторов $b_1=(1,0,0,1)$, $b_2=(0,-2,-1,1)$. Чтобы найти собственные векторы, относящиеся к значению $\lambda_2=0$, вычислим образы векторов b_1,b_2 при операторе $\mathcal{A}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем базис $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 4 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Таким образом, базис $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$ состоит из вектора $a_3=(-2,-2,-1,-1)$, а базис $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}+2\mathcal{E})$ - из вектора $a_4=(2,4,2,0)$.

В некоторых задачах требуется вычислить произвольную степень данной матрицы A (т.е. найти формулы для элементов матрицы A^n как функций от n). Покажем на примере, как это можно сделать для матриц, у которых характеристический многочлен разлагается на линейные множители.

Для любого натурального n найти n-ю степень матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся результатами сл. 24-25. Положим

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A_1 – матрица оператора, имеющего матрицу A, в базисе из собственных векторов, а T – матрица перехода от исходного базиса к базису, состоящему из собственных векторов $a_1 = (-2, 0, 2, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0, 0)$, $-a_3 = (2, 2, 2, 1)$, $\frac{1}{2}a_4 = (1, 2, 1, 0)$.

Тогда $A_1 = T^{-1} \cdot A \cdot T$ по формуле преобразования матрицы линейного оператора при изменении базиса (сл.19 т.2-7). Умножив обе части этого равенства слева на T, а справа на T^{-1}, получим равенство $A = T \cdot A_1 \cdot T^{-1}$. Для любого натурального n имеем $A^n = (T \cdot A_1 \cdot T^{-1})^n = T \cdot A_1 \cdot T^{-1} \cdot T \cdot A_1 \cdot T^{-1} \cdot \ldots \cdot T \cdot A_1 \cdot T^{-1} = T \cdot A_1^n \cdot T^{-1}$.

Так как $A_1^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ и $T^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ (рекомендуется найти самостоятельно), получаем, что $A^n =$

$$(-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n \begin{pmatrix} 2^n - 2 & 3 - 2^n & 2^{n+1} - 4 & 2^{n+1} - 2 \\ 2^{n+1} - 4 & 5 - 2^{n+1} & 2^{n+2} - 6 & 4 - 2^{n+2} \\ 2^n - 2 & 2^n - 2 & 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы, подобные диагональным матрицам, возводить в степень наиболее просто. Однако возможно возводить в степень и матрицы, у которых характеристический многочлен разлагается на линейные множители. Такие матрицы подобны нормальным формам Жордана, т.е. блочно-диагональным матрицам с клетками Жордана на главной диагонали. При возведении такой матрицы в степень n получается блочно-диагональная матрица, у которой на диагонали находятся n-е степени блоков исходной матрицы. Таким образом, для возведения нормальной формы Жордана в степень n достаточно уметь находить n-ю степень клетки Жордана. Общий вид клетки Жордана $J(\lambda, s)$ см. на сл.9.

Предложение

Пусть F – поле. Для любого $\lambda \in F$ и любых $s, n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$J(\lambda, s)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_n^2\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_n^3\lambda^{n-3} & C_n^2\lambda^{n-1} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \alpha_{s3} & \alpha_{s4} & \dots & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Рекомендуется доказать это утверждение индукцией по n.

В j-ом столбце матрицы $J(\lambda, s)^n$ начиная с j-ого элемента стоят слагаемые выражения $(\lambda+1)^n$, расписанного по биномиальной формуле Ньютона (сл.12 т.1-2):

$$(\lambda+1)^n = \lambda^n + n\lambda^{n-1} + C_n^2\lambda^{n-2} + \ldots + C_n^k\lambda^{n-k} \ldots + 1,$$

дополненные при необходимости (когда число этих слагаемых меньше $s-j+1$) нулями. Поэтому в последней строке формулы для матрицы $J(\lambda, s)^n$ через α_{sj} обозначен соответствующий элемент, который равен 0 при $s > n-j+2$ и равен $C_n^{s-j}\lambda^{n-s+j}$ при $s \leq n-j+2$.

Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n$, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$, характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$ определяется равенством (3) сл.5. Ограничение оператора $\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E}$ на корневое подпространство $V(\mathcal{A}, \lambda_j)$ является нильпотентным оператором, поэтому в силу теоремы 2 сл.12 т.2-12 и леммы сл.6 минимальный многочлен для ограничения $\mathcal{A}$ на $V(\mathcal{A}, \lambda_j)$ имеет вид $(x - \lambda_j)^{\ell_j}$, где ℓ_j – наибольшая длина нильслоя в $V(\mathcal{A}, \lambda_j)$ относительно ограничения $\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E}$. С помощью теоремы сл.14 т.2-10 получаем следующее утверждение.

Теорема

Минимальный многочлен $\mu_{\mathcal{A}} = (x - \lambda_1)^{\ell_1} (x - \lambda_2)^{\ell_2} \dots (x - \lambda_m)^{\ell_m}$.

Сравнивая минимальный и характеристический многочлены, получаем

Следствие

Если характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$ разлагается на линейные множители, то он является делителем некоторой степени минимального многочлена оператора $\mathcal{A}$.