Тема 2-12: Нильпотентные операторы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

В этой теме изучается важный класс линейных операторов, используемых в дальнейшем. Для нильпотентного оператора на конечномерном линейном пространстве удается найти базис, в котором этот оператор имеет матрицу, устроенную достаточно простым образом. Эта же идея используется впоследствии и для характеризации операторов, у которых характеристический многочлен разлагается на линейные множители.

Пусть V – линейное пространство над полем F, $\dim V = n$, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется *нильпотентным*, если для некоторого натурального m справедливо $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$. Наименьшее натуральное число с этим свойством называется *ступенью нильпотентности* оператора $\mathcal{A}$.

Легко понять, что минимальный многочлен нильпотентного ступени m оператора есть x^m. Из теоремы Гамильтона-Кэли (сл.5 т.2-10) вытекает, что $m \le n$.

Оператор дифферецирования $\mathcal{D}$ на пространстве многочленов $VP_n(F)$ степени не выше n является нильпотентным оператором ступени $n+1$. В самом деле, $\mathcal{D}^s f = f^{(s)}$ – производная s-го порядка от многочлена f. Таким образом, $\mathcal{D}^s x^k = 0$ при $s > k$, откуда получаем требуемое.

Предложение

Пусть V – линейное пространство над полем F, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ – нильпотентный ступени m линейный оператор. Тогда

1. для любого ненулевого инвариантного относительно $\mathcal{A}$ подпространства U имеет место строгое включение $\mathcal{A}U \subset U$;
2. для любых $v \in V$ и натурального s, если $\mathcal{A}^s v \neq 0_V$, $\mathcal{A}^{s+1} v = 0_V$, то система векторов $(v, \mathcal{A}v, \ldots, \mathcal{A}^s v)$ линейно независима и ее линейная оболочка $W = \langle v, \mathcal{A}v, \ldots, \mathcal{A}^s v\rangle$ есть наименьшее по включению инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство, содержащее вектор v.

$\Downarrow$ Если $\mathcal{A}U = U$ для некоторого подпространства U, то $U = \mathcal{A}U = \mathcal{A}(\mathcal{A}U) = \mathcal{A}^2 U = \ldots = \mathcal{A}^s U$ для любого натурального s, откуда $U = \mathcal{A}^m U = \mathcal{O}U = \{0_V\}$. Этим доказано утверждение 1. Для доказательства утверждения 2 предположим, что $\lambda_0 v + \lambda_1 \mathcal{A}v + \ldots + \lambda_s \mathcal{A}^s v = 0_V$ и $\lambda_j \neq 0$ для некоторого $0 \leq j \leq s$. Выберем наименьшее целое число j со свойством $\lambda_j \neq 0$. Подействовав на обе части последнего равенства оператором $\mathcal{A}^{s-j}$, получим $\lambda_j \mathcal{A}^s v = 0_V$,что противоречит условиям $\lambda_j \neq 0$ и $\mathcal{A}^s v \neq 0_V$. Это противоречие показывает, что система векторов $(v, \mathcal{A}v, \ldots, \mathcal{A}^s v)$ линейно независима. Последнее утверждение следует из того, что W инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и если подпространство U_1 инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и $v \in U_1$, то и $\mathcal{A}v, \ldots, \mathcal{A}^s v \in U_1$. $\Uparrow$

Нильслои

Пусть V – линейное пространство над полем F, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ – нильпотентный ступени m линейный оператор.

Определение

Система векторов $(v_0, v_1, \dots, v_s)$ называется *нильслоем* относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, если $v_{j+1} = \mathcal{A}v_j$ при $j = 0, 1, \dots, s-1$, $v_s \neq 0_V$ и $\mathcal{A}v_s = 0_V$. *Длиной* нильслоя называется количество векторов в нем.

Длина нильслоя $(v_0, v_1, \dots, v_s)$ равна $s+1$. В силу утверждения 2 предложения сл.4 любой нильслой представляет собой линейно независимую систему. Из определения нильслоя следует, что $v_s \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$, $v_{s-1} \in (\mathrm{Ker}\mathcal{A}^2 \setminus \mathrm{Ker}\mathcal{A})$, ..., $v_{s-j} \in (\mathrm{Ker}\mathcal{A}^{j+1} \setminus \mathrm{Ker}\mathcal{A}^j)$ $(j = 2, \dots, s)$.
Из любого ненулевого вектора $v \in V$ можно “вытянуть” нильслой, полагая $v_0 = v$ и $v_{j+1} = \mathcal{A}v_j$ для $j = 0, 1, \dots$ до появления нулевого вектора.
Длина любого нильслоя не превосходит ступени нильпотентности m линейного оператора.

Определение

Система векторов называется *жордановой* относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, если она состоит из нильслоев, следующих друг за другом. *Жордановой таблицей* называется такая запись жордановой системы, в которой нильслои записаны друг под другом и выровнены по правому краю.

Жорданова таблица имеет вид (векторы в нильслоях пронумерованы справа налево)

$$\begin{array}{ccccc} v_{1s_1} & v_{1,s_1-1} & \ldots & v_{12} & v_{11} \\ v_{2s_2} & v_{2,s_2-1} & \ldots & v_{22} & v_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{\ell s_\ell} & v_{\ell,s_\ell-1} & \ldots & v_{\ell 2} & v_{\ell 1} \end{array} \qquad (1)$$

Предложение

Жорданова система линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима система векторов последнего столбца соответствующей жордановой таблицы.

$\Downarrow$ Подсистема линейно независимой системы сама линейно независима, поэтому если жорданова система линейно независима, то и система последнего столбца ее жордановой таблицы линейно независима.

Окончание доказательства предложения

Предположим, что система векторов последнего столбца жордановой таблицы (1) сл.6 линейно независима, а вся соответствующая жорданова система линейно зависима. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{s_k}\lambda_{kj}v_{kj}=0_V- \tag{2}$$

нетривиальная линейная комбинация. Выберем наибольшее значение j так, что $\lambda_{kj}\neq 0$ при некотором $1\leq k\leq \ell$ и зафиксируем соответствующее значение k. Подействуем на обе части равенства (2) линейным оператором $\mathcal{A}^{j-1}$. Пусть r – номер любого нильслоя, не менее короткого, чем k-й (т.е. $s_r\geq s_k$). Тогда $\mathcal{A}^{j-1}v_{rj}=v_{r1}$. Далее, для любого $1\leq m\leq \ell$ и любого $1\leq t<\min\{j,s_m+1\}$ справедливо $\mathcal{A}^{j-1}v_{mt}=0_V$. Следовательно, из (2) получаем

$$\sum_{1\leq r\leq \ell, s_r\geq s_k}\lambda_{rj}v_{r1}=0_V,$$

т.е. в последнем столбце нашлась линейно зависимая подсистема. Полученное противоречие завершает доказательство. $\Uparrow$

Пусть имеется жорданова таблица (1) сл.6. Рассмотрим следующие ее *элементарные преобразования*.

Определение

1. Прибавление (“повекторное”) к одной строке фрагмента другой, не менее длинной строки, умноженного на скаляр.
2. Умножение всех векторов одной строки на ненулевой скаляр.
3. Сдвиг строки вправо для выбрасывания нулевых векторов.
4. Перестановка строк.

Например, если $s_2 \geq s_1$, то преобразование 1 может состоять в замене строки $v_{1s_1}, \ldots, v_{12}, v_{11}$ на строку $v_{1s_1} + \gamma v_{2s_1}, \ldots, v_{12} + \gamma v_{22}, v_{11} + \gamma v_{21}$ (здесь γ – скаляр). При этом несколько последних векторов могут оказаться равными 0_V, и тогда применяем преобразование 3 для выбрасывания нулевых векторов.

Следующее утверждение непосредственно получается из определений.

Предложение

Применение к жордановой таблице конечного числа элементарных преобразований таким образом, чтобы в результате получилась система из ненулевых векторов, всегда дает жорданову таблицу.

Жорданов базис

Определение

Жордановым базисом относительно нильпотентного линейного оператора $\mathcal{A}$ линейного пространства называется базис этого пространства, являющийся жордановой системой относительно оператора $\mathcal{A}$.

Теорема

Пусть V – ненулевое конечномерное пространство, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ – нильпотентный оператор. Тогда V имеет жорданов базис относительно $\mathcal{A}$.

$\Downarrow$ Выберем в пространстве V некоторый базис $(e_1, \ldots, e_n)$ и "вытянем" из каждого базисного вектора e_j нильслой $e_{j1} = e_j, e_{j2} = \mathcal{A}e_{j1}, \ldots, e_{js_j} = \mathcal{A}e_{js_j - 1}$ так, что $e_{js_j} \neq 0_V$, $\mathcal{A}e_{js_j} = 0_V$. Система из полученных нильслоев порождает V, так как имеет в качестве подсистемы базис $(e_1, \ldots, e_n)$. Если она линейно независима, то является жордановым базисом. Если эта система линейно зависима, то запишем ее как жорданову таблицу. Согласно предложению сл.6 последний столбец таблицы является линейно зависимым. Пусть $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{ks_k} = 0_V$, где в левой части – нетривиальная линейная комбинация этой системы.

Выберем индекс k так, чтобы $\lambda_k \neq 0$ и s_k – наименьшее из чисел с этим свойством. Выразим вектор e_{ks_k} через остальные векторы последнего столбца: $e_{ks_k} = \sum_{\ell \neq k} \mu_\ell e_{\ell s_\ell}$. Затем для каждого $\ell \neq k$ прибавим к k-й строке жордановой таблицы фрагмент ℓ-й строки, умноженный на $-\mu_\ell$. В k-й строке последний вектор будет равен 0_V. Сдвинем эту строку вправо для исключения нулевых векторов. Получим жорданову систему, содержащую по крайней мере на один вектор меньше, чем предыдущая. Так как элементарные преобразования жордановой таблицы получаются как последовательность элементарных преобразований соответствующей системы векторов и отбрасывания получающихся нулевых векторов, в силу предложения сл.15 темы 2-1 линейная оболочка полученной жордановой таблицы совпадает с V. Если полученная жорданова система линейно независима, то она и будет жордановым базисом. В случае линейной зависимости применяем к ней рассуждения, изложенные выше. На каждом шаге этого процесса получается жорданова система с меньшим, чем предыдущая, числом векторов, порождающая V. Поскольку исходная система содержит конечное число $(\sum_{k=1}^{n} s_n)$ векторов, рассматриваемый процесс завершится построением жорданова базиса пространства V. $\Uparrow$

Пусть $(e_{11}, \ldots, e_{1s_1}, e_{21}, \ldots, e_{2s_2}, \ldots, e_{k1}, \ldots, e_{ks_k})$ – жорданов базис пространства V относительно нильпотентного оператора $\mathcal{A}$ с выделенными нильслоями. Тогда $V = \langle e_{11}, \ldots, e_{1s_1}\rangle \oplus \langle e_{21}, \ldots, e_{2s_2}\rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_{k1}, \ldots, e_{ks_k}\rangle$. Согласно предложению сл.4 каждый нильслой порождает инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство. Матрица оператора $\mathcal{A}$ относительно жорданова базиса является распавшейся и имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & O & \ldots & O \\ O & A_2 & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & A_k \end{pmatrix} \tag{3}$$

где A_j – матрица ограничения оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $\langle e_{j1}, \ldots, e_{js_j}\rangle$ $(j = 1, \ldots, k)$. Порядок этой матрицы равен s_j. Так как $\mathcal{A}e_{j\ell} = e_{j,\ell+1}$ при $\ell = 1, \ldots, s_j - 1$ и $\mathcal{A}e_{js_j} = 0_V$, имеем

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Эта матрица называется *жордановой клеткой порядка* s_j, соответствующей собственному значению 0.

Для данного жорданова базиса обозначим через q_j количество нильслоев длины j в этом базисе ($j = 1, 2, \ldots$). Оказывается, данные числа не зависят от выбора жорданова базиса.

Теорема

Пусть V – линейное пространство, $\mathcal{A}$ – нильпотентный линейный оператор ступени m на V, $r_0 = \dim V$, $r_j = \mathrm{r}(\mathcal{A}^j)$ ($j = 1, 2, \ldots, m+1$). Тогда для любого жорданова базиса относительно $\mathcal{A}$ имеют место равенства $q_j = r_{j-1} - 2r_j + r_{j+1}$ для всех $j = 1, 2, \ldots, m$.

$\Downarrow$ Зафиксируем жорданов базис пространства V относительно $\mathcal{A}$. Легко видеть, что $\dim V = q_1 + 2q_2 + \ldots + mq_m$. Если $e_{j1}, \ldots, e_{js_j}$ – нильслой из рассматриваемого базиса, то под действием оператора $\mathcal{A}$ этот нильслой переходит в нильслой $e_{j2}, \ldots, e_{js_j}$ и, следовательно, $\mathcal{A}\langle e_{j1}, \ldots, e_{js_j}\rangle = \langle e_{j2}, \ldots, e_{js_j}\rangle$. В силу предложения сл.3 т.2-8 получаем $r_1 = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = q_2 + 2q_3 + \ldots + (m-1)q_m$. Аналогично получаем $r_2 = q_3 + 2q_4 + \ldots + (m-2)q_m$, и в общем случае $r_j = q_{j+1} + 2q_{j+2} + \ldots + (m-j)q_m$ ($j = 3, \ldots, m$). Вычитая из равенства $r_j = q_{j+1} + 2q_{j+2} + \ldots + (m-j)q_m$ равенство $r_{j+1} = q_{j+2} + 2q_{j+3} + \ldots + (m-j-1)q_m$, получаем $r_j - r_{j+1} = q_{j+1} + q_{j+2} + \ldots + q_m$ для $j = 0, 1 \ldots, m-1$. Из этих равенств получаем $q_j = (r_{j-1} - r_j) - (r_j - r_{j+1}) = r_{j-1} - 2r_j + r_{j+1}$, что и требуется доказать. $\Uparrow$

Каждому нильслою из s векторов в жордановом базисе соответствует клетка Жордана порядка s в матрице нильпотентного оператора в этом базисе. Поэтому из теоремы сл.12 получается

Следствие

Матрица нильпотентного оператора в жордановом базисе относительно этого оператора определена однозначно с точностью до перестановки клеток Жордана на главной диагонали.

Характеристический и минимальный многочлены нильпотентного оператора

Очевидно, что характеристический многочлен блочной матрицы (3) с учетом (4) (см. сл.11) является определителем нижнетреугольной матрицы и потому равен $(-1)^n x^n$, где $n = \sum_{j=1}^{k} s_j$. Поэтому имеет место следующая

Теорема 1

Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n$, $\mathcal{A}$ – нильпотентный линейный оператор на V. Тогда характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}} = (-1)^n x^n$.

Таким образом, нильпотентный оператор имеет единственное собственное значение 0 кратности $\dim V$.

Для нильслоя B длины s ограничение нильпотентного оператора $\mathcal{A}|_{\langle B \rangle}$ имеет минимальный многочлен x^s. Из теоремы сл.14 т.2-10 получаем следующее утверждение.

Теорема 2

Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n$, $\mathcal{A}$ – нильпотентный линейный оператор на V, и s – наибольшая длина нильслоя в жордановом базисе для оператора $\mathcal{A}$. Тогда минимальный многочлен $\mu_{\mathcal{A}} = x^s$.

Алгоритм нахождения жорданова базиса по матрице нильпотентного оператора

Пусть $A \in F^{n\times n}$ – матрица нильпотентного оператора в некотором базисе.

Выписываем матрицу $(E_n|A^\top)$, затем приводим ее с помощью элементарных преобразований (длинных) строк к виду $(E'|A')$, где A' – ступенчатая по строкам матрица. Затем записываем матрицу $(E'|A'|A'\cdot A^\top)$ и приводим ее с помощью элементарных преобразований (длинных) строк к виду $(E''|A''|A''')$, где A''' – ступенчатая по строкам матрица. Продолжаем этот процесс, пока в произведении не получится нулевая матрица. Полученные строки выравниваем по правому краю. Получилась жорданова таблица, каждому вектору соответствует строка из n его координат в исходном базисе. Находим линейные зависимости между элементами последнего столбца таблицы, выражаем через остальные последний элемент самой короткой строки и обнуляем его, прибавляя к этой строке фрагменты остальных строк, умноженные на подходящие скаляры. Сдвигаем строку вправо, чтобы отбросить нулевые векторы. Повторяем эти действия до тех пор, пока количество векторов в жордановой системе не окажется равным n. Полученная система и будет жордановым базисом относительно данного нильпотентного оператора.

Обоснование алгоритма

Обоснованием данного алгоритма служат доказательство теоремы сл.9 и обоснование ЯО алгоритма (сл.9 т.2-8). Единичная матрица состоит из координат векторов исходного базиса, к ним приписываются координаты их образов при данном операторе, далее находится базис образа и образы этих векторов при действии оператора, т.е. из базисных векторов вытягиваются нильслои. Получается жорданова таблица, которая перестраивается в линейно независимую жорданову таблицу.

Пример нахождения жорданова базиса по матрице нильпотентного оператора

Найти жорданов базис относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу $(E_5|A^\top)$ и приведем ее с помощью элементарных преобразований строк к нужному виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & 2 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Видим, что векторы $(2, 1, 0, 1, 0)$ и $(1, 1, 1, 0, 2)$ образуют базис $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$.
Вычисляем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -3 & 8 \\ -1 & -2 & -4 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$ Замечаем, что $(0, 1, 2, -1, 4) \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$.

Продолжение примера (2)

Запишем

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

Так как $(0,1,2,-1,4) \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$, заключаем что $\mathcal{A}^3 = \mathcal{O}$. Составляем жорданову таблицу, выравнивая по правому краю строки последней матрицы с отброшенными нулевыми векторами и добавляя базис $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Затем выполняем элементарные преобразования жордановой таблицы.

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\
 & & & & & & & & & & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 2
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\
 & & & & & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 1 & 2 & -1 & 4
\end{array}\right) \sim
$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ & & & & & & & & & & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Таким образом, получаем жорданов базис из двух нильслоев $e_{11} = (0, 1, 0, 0, 0)$, $e_{12} = (-1, 0, 0, -1, 0)$, $e_{13} = (0, 1, 2, -1, 4)$, $e_{21} = (1, 1, 0, 0, 1)$, $e_{22} = (1, 0, -1, 1, -2)$. В этом базисе линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, имеющую на главной диагонали две клетки Жордана $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Для линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в некотором базисе матрицей
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & -8 & -6 \end{pmatrix},$$
определить строение матрицы в жордановом базисе.

Используем теорему сл.13. Имеем $r_0 = 5$ (порядок матрицы A – размерность пространства, на котором действует $\mathcal{A}$), $r_1 = \mathrm{r}(A) = 3$ (вычислено при решении предыдущего примера). Далее, $r_2 = \mathrm{r}(A^2)$.

Вычислим $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что $\mathrm{r}(A^2) = 1$ и $r_2 = 1$.

Легко вычислить, что $A^3 = O$, т.е. $r_3 = 0$ и $r_m = 0$ при $m > 3$. Применяя формулу из теоремы сл.13, получаем $q_1 = r_0 - 2r_1 + r_2 = 0$, $q_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 = 1$, $q_3 = r_2 - 2r_3 + r_4 = 1$, $q_m = 0$ при $m > 3$. Таким образом, любой жорданов базис относительно оператора $\mathcal{A}$ состоит из одного нильслоя длины 3 и одного нильслоя длины 2.

Окончание примера

Матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$