Тема 2-11: Собственные векторы и собственные значения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть V – линейное пространство над полем F, $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V)$. Естественно считать наиболее простым способом действия линейного оператора $\mathcal{A}$ на вектор $v \in V$ умножение этого вектора на некоторый скаляр $\lambda \in F$. Мы приходим к следующему определению.

Определение

Если $v \neq 0_V$ и $\mathcal{A}v = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in F$, то v называется *собственным вектором*, а λ – *собственным значением* линейного оператора $\mathcal{A}$. При этом говорят, что собственный вектор v *относится* к собственному значению λ, а собственное значение λ *относится* к собственному вектору v.

Если $\mathrm{Ker}\mathcal{A} \neq \{0_V\}$, то любой ненулевой вектор из $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$ является собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, относящимся к собственному значению 0.
Предлагается найти в качестве упражнения собственные векторы и собственные значения линейных операторов, приведенных в примерах т.2-7.

Предложение

Вектор v является собственным вектором для линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\langle v \rangle$ является инвариантным относительно $\mathcal{A}$ подпространством и $\dim\langle v \rangle = 1$.

$\Downarrow$ Пусть v – собственный вектор линейного оператора $\mathcal{A}$. Так как $v \neq 0_V$, v можно взять в качестве базиса подпространства $\langle v \rangle$ и потому $\dim\langle v \rangle = 1$. Для любого $u \in \langle v \rangle$ имеем $u = \alpha v$ для некоторого скаляра α. Поскольку $\mathcal{A}v = \lambda v$, получаем $\mathcal{A}u = \mathcal{A}(\alpha v) = \alpha(\mathcal{A}v) = \alpha(\lambda v) = (\alpha\lambda)v \in \langle v \rangle$, т.е. $\mathcal{A}\langle v \rangle \subseteq \langle v \rangle$.
Обратно, пусть $\langle v \rangle$ является инвариантным относительно $\mathcal{A}$ подпространством и $\dim\langle v \rangle = 1$. Тогда $v \neq 0_V$ и $\mathcal{A}v \in \langle v \rangle$, т.е. $\mathcal{A}v = \lambda v$ для некоторого скаляра λ. Таким образом, v – собственный вектор линейного оператора $\mathcal{A}$.$\Uparrow$

Предложение

Множество всех собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$, относящихся к собственному значению λ, и нулевой вектор образуют подпространство, совпадающее с ядром $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$.

$\Downarrow$ Имеем

$\mathcal{A}v=\lambda v \Leftrightarrow \mathcal{A}v-\lambda\mathcal{E}v=0_V \Leftrightarrow (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})v=0_V \Leftrightarrow v\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$. Таким образом, условие, что v является собственным вектором для линейного оператора $\mathcal{A}$ равносильно тому, что $v\neq 0_V$ и $v\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$. Следовательно, множество всех собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$, относящихся к собственному значению λ, и нулевой вектор совпадает с ядром $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$ и потому является подпространством. Утверждение доказано. $\Uparrow$

Находить собственные значения линейного оператора помогает следующее

Предложение

Пусть V – линейное пространство размерности n над полем F, $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V)$. Скаляр $\lambda \in F$ является собственным значением линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда λ является корнем характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$.

$\Downarrow$ Согласно предложению сл.4 скаляр $\lambda \in F$ является собственным значением линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \neq \{0_V\}$. В силу теоремы сл.6 т.2-8, примененной к линейному оператору $\mathcal{A}$, получаем что $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \neq \{0_V\} \Leftrightarrow \mathrm{d}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{r}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) < \dim V$. Возьмем произвольный базис пространства V и обозначим через A матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \leftrightarrow A - \lambda E_n$. Так как $\mathrm{r}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \mathrm{r}(A - \lambda E_n)$ и $\mathrm{r}(A - \lambda E_n) < n \Leftrightarrow |A - \lambda E_n| = 0$, с учетом равенств $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_A(\lambda) = |A - \lambda E_n|$ получаем требуемое. $\Uparrow$

Теорема

Собственные векторы $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейного оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, образуют линейно независимую систему.

$\Downarrow$ Докажем это утверждение индукцией по k. База индукции очевидна: при $k = 1$ имеем $v_1 \neq 0_V$, т.е. система из одного вектора v_1 линейно независима. Для доказательства шага индукции предположим, что утверждение уже доказано для всех $1 \leq m < k$. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$ – собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Тогда $\mathcal{A}v_j = \lambda_j v_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Предположим, что

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = 0_V \tag{1}$$

и докажем, что $\alpha_j = 0$ при всех $j = 1, 2, \ldots, k$.

Окончание доказательства теоремы

Применив к обеим частям равенства (1) линейный оператор $\mathcal{A}$, получаем $\mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k) = \mathcal{A}0_V$ и $\alpha_1(\mathcal{A}v_1) + \alpha_2(\mathcal{A}v_2) + \ldots + \alpha_k(\mathcal{A}v_k) = = 0_V$, откуда

$$\alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2 + \ldots + \alpha_k\lambda_k v_k = 0_V.$$

Умножив обе части равенства (1) на λ_k, получим

$$\lambda_k\alpha_1 v_1 + \lambda_k\alpha_2 v_2 + \ldots + \lambda_k\alpha_k v_k = 0_V.$$

Вычитая из последнего полученного равенства предпоследнее, получаем $\alpha_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \alpha_2(\lambda_k - \lambda_2)v_2 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1} = 0_V$. Применяя предположение индукции к векторам $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$, заключаем, что система $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ линейно независима, откуда $\alpha_j(\lambda_k - \lambda_j) = 0$ при $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Поскольку $\lambda_k - \lambda_j \neq 0$, имеем $\alpha_j = 0$ при $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Подставив в равенство (1) сл.6, получаем $\alpha_k v_k = 0_V$, откуда $\alpha_k = 0$, поскольку $v_k \neq 0_V$. Шаг индукции доказан. Доказательство теоремы закончено. $\Uparrow$

Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства V над полем F задан в некотором базисе матрицей $A \in F^{n\times n}$.

Чтобы найти собственные значения линейного оператора $\mathcal{A}$, следует вычислить характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x) = \chi_A(x) = |A - xE_n|$ и найти его корни, лежащие в поле F. Если $\chi_A(x)$ имеет целочисленные коэффициенты, то можно пользоваться подбором рациональных корней (сл.10, 12 т.1-10). Так как старший коэффициент характеристического многочлена равен $(-1)^n$, в этом случае все рациональные корни будут целыми числами. Затем для каждого собственного значения λ находим базис ядра $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$, используя один из алгоритмов темы 2-8 (сл.7, 8). Собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к собственному значению λ, суть все нетривиальные линейные комбинации найденных базисных векторов.

Обоснование этого алгоритма непосредственно получается из предложений сл.5 и 4, так как ненулевые векторы из ядра $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ – это как раз все нетривиальные линейные комбинации базисных векторов этого ядра.

Пример нахождения собственных значений и собственных векторов

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства F^4 задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$.

Характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x) = (x-2)^3(x+2)$ найден на сл.3-4 т.2-10; его корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$.
Мы будем искать координаты собственных векторов в том базисе, в котором данный оператор имеет матрицу A. Чтобы найти собственные векторы, относящиеся к собственному значению λ_1, найдем базис ядра линейного оператора $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}$. Используем алгоритм 1 (сл.7 т.2-8).

Матрица оператора $\mathcal{A}_1$ имеет вид $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Применяя метод Гаусса–Жордана к однородной системе линейных уравнений с такой матрицей, получаем следующую цепочку матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По последней матрице записываем однородную систему линейных уравнений, ее общее решение и фундаментальную систему решений (которая будет базисом ядра $\mathrm{Ker}\mathcal{A}_1$): $\begin{cases} x_1 - x_3 - 4x_4 = 0; \\ x_2 + x_4 = 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 4x_4; \\ x_2 = -x_4, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Произвольный собственный вектор, относящийся к собственному значению 2, может быть записан в виде $\gamma_1(-1, 0, 1, 0) + \gamma_2(-4, -1, 1, 0)$, где по крайней мере одно из чисел γ_1, γ_2 отлично от нуля.

Аналогично находятся собственные векторы, относящиеся к собственному значению $\lambda_2 = -2$. Мы находим ядро линейного оператора $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{E} = \mathcal{A} + 2\mathcal{E}$. Выписываем матрицу этого оператора и приводим ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь получаются следующие однородная система линейных уравнений, ее общее решение и фундаментальная система решений (которая будет базисом ядра $\mathrm{Ker}\mathcal{A}_2$):

$$\begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 + x_4 = 0; \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = -x_4; \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Произвольный собственный вектор, относящийся к собственному значению -2, может быть записан в виде $\gamma_1(0, -1, 0, 1)$ для некоторого $\gamma_1 \neq 0$.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства V называется *оператором простой структуры* (или приводимым к диагональному виду), если существует базис пространства V, в котором матрица $\mathcal{A}$ диагональная.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из определений матрицы линейного оператора (сл.9 т.2-7) и собственного вектора.

Предложение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства V является оператором простой структуры тогда и только тогда, когда V имеет базис, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Из этого утверждения в силу формулы изменения матрицы линейного оператора при изменении базиса (сл.19 т.2-7) получается такое

Следствие

Матрица $A \in F^{n\times n}$ подобна диагональной матрице тогда и только тогда, когда линейный оператор, заданный матрицей A в некотором базисе линейного пространства размерности n, является линейным оператором простой структуры.

Одно достаточное условие того, что линейный оператор является оператором простой структуры, дается следующим утверждением.

Предложение

Если линейный оператор, действующий на линейном пространстве V размерности n, имеет n различных собственных значений, то этот оператор является линейным оператором простой структуры.

$\Downarrow$ В силу теоремы сл.6 собственные векторы $v_1, \ldots, v_n$, относящиеся к различным собственным значениям линейного оператора, образуют линейно независимую систему. Согласно утверждению 2 теоремы сл.6 т.2-3 эта система является базисом пространств V. В силу предложения сл.13 получаем требуемое. $\Uparrow$

Можно привести примеры, показывающие, что условие, указанное в предложении, не является необходимым.

Алгоритм проверки, будет ли оператор оператором простой структуры

Чтобы проверить, будет ли данный линейный оператор линейным оператором простой структуры, необходимо найти его собственные векторы и посмотреть, можно ли построить из них базис всего пространства. Учитывая предложение сл.12, достаточно проверить, что сумма размерностей подпространств, состоящих из собственных векторов, относящихся к одному собственному значению, и нулевого вектора, равна размерности всего пространства (т.е. порядку матрицы оператора).

Необходимое и достаточное условие быть оператором простой структуры

Теорема

Линейный оператор $\mathcal{A}$ является оператором простой структуры тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен $\mu_{\mathcal{A}}$ имеет вид $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_m)$ для различных скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

$\Downarrow$ Пусть $\mathcal{A}$ является оператором простой структуры линейного пространства V и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – его различные собственные значения. Тогда $V = \oplus_{j=1}^{m} \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E})$. Минимальный многочлен ограничения оператора $\mathcal{A}$ на $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E})$ есть $x - \lambda_j$, откуда в силу теоремы сл.14 т.2-10 следует $\mu_{\mathcal{A}} = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_m)$.
Обратно, пусть $\mu_{\mathcal{A}} = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_m)$ для различных скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Положим $U_j = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E})$ $(j = 1, \dots, m)$. Покажем, что $V = \sum_{j=1}^{m} U_j$. Пусть $v \in V$. Тогда $v_1 = (\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})\dots(\mathcal{A} - \lambda_m \mathcal{E})v \in$ $\in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})$, т.е. $\mathcal{A}v_1 = \lambda_1 v_1$ и $(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})v_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)v_1$. Имеем $(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})((\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{E})\dots(\mathcal{A} - \lambda_m \mathcal{E})v - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} v_1) = 0_V$. Следовательно, $(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{E})\dots(\mathcal{A} - \lambda_m \mathcal{E})v - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} v_1 = v_2$, где $v_2 \in U_2$, и $(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{E})\dots(\mathcal{A} - \lambda_m \mathcal{E})v = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} v_1 + v_2$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем $(\mathcal{A} - \lambda_4 \mathcal{E})\dots(\mathcal{A} - \lambda_m \mathcal{E})v =$ $= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} v_1 + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} v_2 + v_3$ для некоторого $v_3 \in U_3$. Продолжая, придем к равенству $v = u_1 + \dots + u_m$ для некоторых $u_j \in U_j$.

Индукцией по $n \leq m$ покажем, что сумма $\sum_{j=1}^{n} U_j$ — прямая. Этим доказательство теоремы будет закончено. Пусть $n = 2$. Покажем, что $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$. Для любого $v \in U_1 \cap U_2$ имеем $\mathcal{A}v = \lambda_1 v$ и $\mathcal{A}v = \lambda_2 v$, откуда $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0_V$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, заключаем, что $v = 0_V$. Предположим, что при $k < n$ утверждение доказано, т.е. сумма k подпространств из $U_1, \ldots, U_n$ является прямой и докажем, что сумма $\sum_{j=1}^{n} U_j$ — прямая. Пусть $v \in U_j \cap \sum_{\ell \neq j} U_\ell$. Тогда $v = \sum_{\ell \neq j} u_\ell$, где $u_\ell \in U_\ell$. Применяя к обеим частям последнего равенства оператор $\mathcal{A}$, получаем $\lambda_j v = \sum_{\ell \neq j} \lambda_\ell u_\ell$. Следовательно, $\lambda_j \sum_{\ell \neq j} u_\ell = \sum_{\ell \neq j} \lambda_\ell u_\ell$, откуда $\sum_{\ell \neq j} (\lambda_j - \lambda_\ell) u_\ell = 0_V$. Если $u_\ell \neq 0_V$ для некоторого $\ell \neq j$, то получаем противоречие с тем, что сумма $\sum_{\ell \neq j} U_\ell$ является прямой, так как $\lambda_j - \lambda_\ell \neq 0$ для всех $\ell \neq j$. Таким образом, $u_\ell = 0_V$ для всех $\ell \neq j$ и $v = 0_V$, т.е. $U_j \cap \sum_{\ell \neq j} U_\ell = \{0_V\}$. Теорема доказана. $\Uparrow$