Тема 2-1: Линейные пространства

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть V – непустое множество, F – поле. Элементы из V будем обозначать малыми латинскими буквами и называть *векторами*, элементы из F будем обозначать малыми греческими буквами и называть *скалярами*.

Определение

V называется *линейным* (или *векторным*) *пространством над полем* F, если выполняются следующие условия.

1. На V определена операция сложения, относительно которой $(V, +)$ является абелевой группой (см. сл.8 т.1-4).
2. Определено отображение $F \times V \longrightarrow V$, образ пары (α, x) обозначаем через αx и называем *произведением* вектора x на скаляр α, и для любых $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in F$ выполняются равенства:
   $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
   $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
   $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
   $1x = x$ (1 – единица поля F).

Нуль абелевой группы $(V, +)$ называется *нуль-вектором* и обозначается через 0_V.

Аксиомы линейного пространства

Непустое множество V называется *линейным* (или *векторным*) *пространством над полем* F, если выполняются следующие условия:

1. $\forall x, y \in V \;\; \exists! z \in V$ (вектор z называется *суммой векторов* x и y и обозначается через $x + y$)
2. $\forall x, y \in V \;\; x + y = y + x$
3. $\forall x, y, z \in V \;\; (x + y) + z = x + (y + z)$
4. $\exists 0 \in V \;\; \forall x \in V \;\; x + 0 = x$
5. $\forall x \in V \;\; \exists y \in V \;\; x + y = 0$
6. $\forall \alpha \in F \;\; \forall x \in V \;\; \exists! y \in V$ (вектор y называется *произведением вектора* x и скаляра α и обозначается через αx)
7. $\forall \alpha \in F \;\; \forall x, y \in V \;\; \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
8. $\forall \alpha, \beta \in F \;\; \forall x \in V \;\; (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
9. $\forall \alpha, \beta \in F \;\; \forall x \in V \;\; \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
10. $\forall x \in V \;\; 1x = x$

Первые 5 аксиом выражают тот факт, что $(V, +)$ является абелевой группой. Поэтому вектор 0 из аксиомы 4 определен однозначно и вектор y из аксиомы 5 однозначно определяется по вектору x.

Пространства геометрических векторов

1. Множества геометрических векторов V_g, V_ℓ (ℓ – любая прямая), V_π (π – любая плоскость) являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$.

Это следует из свойств линейных операций над геометрическими векторами, известных из аналитической геометрии (см. сл.7, 8, 14 т.1-12). Данные примеры позволяют наглядно представить себе линейное пространство.

Пространства матриц

2. Множества $F^{k \times n}$ всех матриц фиксированных размеров $k \times n$ ($k, n \in \mathbb{N}$) с элементами из поля F являются линейными пространствами над полем F.

Это следует из свойств линейных операций над матрицами (т.1-6, сл.8). Обозначим пространство строк $F^{1 \times n}$ через F^n. Оно называется *арифметическим пространством* над полем F.
Пространство столбцов $F^{k \times 1}$ будем обозначать через F_k.

Примеры линейных пространств 3-5

Пространства многочленов

3. Множество всех многочленов $F[x]$ над полем F и множества $VP_n(F)$ всех многочленов степени, не превосходящей n, (включая нулевой многочлен) являются линейными пространствами над полем F.

Это непосредственно следует из свойств операций над многочленами (сл.4 т.1-9).

Пространства функций

4. Пусть X – непустое множество, F – поле. Множество $\mathcal{F}(X, F)$ всех функций из множества X в поле F является линейным пространством над полем F относительно указанных ниже операций.

Положим $V = \mathcal{F}(X, F)$. Для $f, g \in V$ положим $h = f + g$, где $h(x) = f(x) + g(x)$ для любого $x \in X$, и для $\alpha \in F$, $f \in V$ положим $g = \alpha f$, где $g(x) = \alpha f(x)$ для любого $x \in X$.

Поле комплексных чисел

5. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ относительно обычных операций является линейным пространством над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Доказательство того, что пространство функций – линейное пространство

$\Downarrow$Проверим аксиомы 1–10 сл.3, сохраняя обозначение $V = \mathcal{F}(X, F)$. Аксиомы 1 и 6 обеспечиваются определениями сложения функций и умножения функции на скаляр. Пусть $f, g \in V$, $x \in X$. Так как $f(x), g(x) \in F$, имеем $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$, откуда следует $f + g = g + f$, т.е. аксиома 2 выполняется. Аналогично проверяется аксиома 3. Положим $o(x) = 0$ для любого $x \in X$. Тогда функция o обладает свойством $f + o = f$ для любого $f \in V$, т.е. аксиома 4 выполняется. Для функции $f \in V$ и любого $x \in X$ положим $g(x) = -f(x)$. Тогда $f + g = o$, и аксиома 5 выполняется.
Пусть $\alpha \in F$, $f, g \in V$, $x \in X$. Тогда $(\alpha(f+g))(x) = \alpha((f+g)(x)) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x)$, т.е. $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$ и аксиома 7 выполняется. Аналогично проверяется аксиома 8. Для проверки аксиомы 9 возьмем $\alpha, \beta \in F$, $f \in V$, и $x \in X$. Имеем $(\alpha(\beta f))(x) = \alpha((\beta f)(x)) = \alpha((\beta f(x))) = (\alpha\beta) f(x) = ((\alpha\beta) f)(x)$, откуда следует $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f$. Аксиома 9 выполняется. Аксиома 10 выполняется очевидным образом.$\Uparrow$

Предложение

1. *Для любых* $\gamma \in F$, $a \in V$ *справедливы равенства* $\gamma 0_V = 0_V$, $0a = 0_V$.
2. *Для любых* $a \in V$, $\gamma \in F$ *справедливы равенства* $(-1)a = -a$, $\gamma(-a) = -\gamma a$, $(-\gamma)a = -\gamma a$.
3. *Для любых* $\gamma \in F$, $a \in V$ *из* $\gamma \neq 0$, $a \neq 0_V$ *следует* $\gamma a \neq 0_V$.
4. *Для любых* $a, b \in V$, $\gamma \in F$ *справедливо равенство* $\gamma(a - b) = \gamma a - \gamma b$.

$\Downarrow$ Докажем первое из равенств 1. Умножив обе части равенства $0_V + 0_V = 0_V$ на скаляр γ, получим $\gamma(0_V + 0_V) = \gamma 0_V$, откуда $\gamma 0_V + \gamma 0_V = \gamma 0_V + 0_V$ и $\gamma 0_V = 0_V$. Второе равенство доказывается аналогично.
Для доказательства первого из равенств 2 запишем $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0_V$, откуда $a + (-1)a = 0_V$ и $(-1)a = -a$. Второе и третье равенства проверяются аналогично.
Пусть $\gamma \in F$, $a \in V$ и $\gamma \neq 0$, но $\gamma a = 0_V$. Так как $\gamma \neq 0$, существует γ^{-1}. Умножим обе части равенства $\gamma a = 0_V$ на γ^{-1}: $\gamma^{-1}(\gamma a) = \gamma^{-1} 0_V$. Отсюда $(\gamma^{-1}\gamma)a = 0_V$ и $1a = 0_V$, т.е. $a = 0_V$. Утверждение 3 доказано.
Для доказательства утверждения 4 вспомним (сл.9 т.1-4), что $a - b = a + (-b)$. Имеем $\gamma(a - b) = \gamma(a + (-b)) =$
$= \gamma a + \gamma(-b) = \gamma a + (-\gamma b) = \gamma a - \gamma b$. $\Uparrow$

Пусть V – линейное пространство над полем F. Конечная последовательность векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ из V называется *системой векторов*. В системе векторов существен порядок векторов и на разных местах в системе может находиться один и тот же вектор.

Определение

Линейной комбинацией системы векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ с коэффициентами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in F$ называется вектор $b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k$.

Если равенство $b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k$ выполняется для некоторых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in F$, то будем говорить, что вектор b *линейно выражается* через систему векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и обозначать этот факт через $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash b$. Если каждый вектор системы $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ линейно выражается через систему векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, то будем писать $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ и говорить, что система $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *линейно выражается через систему* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Если $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \vdash (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, то будем говорить, что системы $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *линейно эквивалентны* и писать $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash\dashv (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

По правилу умножения строки на столбец имеем

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{pmatrix}.$$

Если $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, то для некоторых $\gamma_{ij} \in F$ имеем

$b_1 = \gamma_{11} a_1 + \gamma_{21} a_2 + \ldots + \gamma_{k1} a_k;$

$b_2 = \gamma_{12} a_1 + \gamma_{22} a_2 + \ldots + \gamma_{k2} a_k;$

....

$b_m = \gamma_{1m} a_1 + \gamma_{2m} a_2 + \ldots + \gamma_{km} a_k.$

Положим $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \ldots & \gamma_{km} \end{pmatrix}.$

Тогда приведенную выше систему равенств можно записать в матричном виде: $(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot \Gamma$, где $\Gamma \in F^{k \times m}$.

Предложение

Если система векторов $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ линейно выражается через систему $(b_1, b_2, \dots, b_m)$, а система $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ линейно выражается через систему $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, то система $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ линейно выражается через систему $(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

$\Downarrow$ Если система векторов $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ линейно выражается через систему $(b_1, b_2, \dots, b_m)$, то имеем $(c_1, c_2, \dots, c_n) = (b_1, b_2, \dots, b_m) \cdot \Delta$ для некоторой матрицы $\Delta \in F^{m\times n}$. Если система векторов $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ линейно выражается через систему $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, то $(b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_1, a_2, \dots, a_k) \cdot \Gamma$ для некоторой матрицы $\Gamma \in F^{k\times m}$. Следовательно, $(c_1, c_2, \dots, c_n) = (b_1, b_2, \dots, b_m) \cdot \Delta = ((a_1, a_2, \dots, a_k) \cdot \Gamma) \cdot \Delta = (a_1, a_2, \dots, a_k) \cdot (\Gamma \cdot \Delta)$. Последнее равенство в этой цепочке доказывается так же, как ассоциативность умножения матриц (т.1-6, с.14). $\Uparrow$

Таким образом, если A, B, C – системы векторов и $B = A \cdot \Gamma$, $C = B \cdot \Delta$ для некоторых матриц Γ, Δ, то $C = A \cdot (\Gamma \cdot \Delta)$.

Определение

Линейной оболочкой системы векторов называется множество всевозможных линейных комбинаций этой системы.

Для системы векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ее линейная оболочка обозначается через $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle$. По определению
$\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle = \{\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k | \gamma_j \in F,\ j = 1, 2, \ldots, k\}$.
Линейная оболочка одного вектора: $\langle a\rangle = \{\gamma a | \gamma \in F\}$.

Предложение

Если $a \neq 0_V$, то отображение $\gamma \mapsto \gamma a$ является биекцией множества F на $\langle a\rangle$.

$\Downarrow$ Очевидно, что указанное отображение сюръективно. Проверим его инъективность. Пусть $\gamma a = \delta a$ для некоторых $\gamma, \delta \in F$. Тогда $\gamma a - \delta a = 0_V$, откуда $(\gamma - \delta)a = 0_V$. Так как $a \neq 0_V$, из утверждения 3 предложения сл.7 следует $\gamma - \delta = 0$ и $\gamma = \delta$. $\Uparrow$

Следствие

Если поле F бесконечно, то линейная оболочка любой системы векторов, содержащей ненулевой вектор, также является бесконечным множеством.

Предложение

1. $\langle\vec{0}\rangle = \{\vec{0}\}$.
2. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\langle\vec{a}\rangle = V_\ell$, где ℓ – любая прямая, коллинеарная вектору $\vec{a}$.
3. Если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = V_\pi$, где π – любая плоскость, компланарная векторам $\vec{a}, \vec{b}$.
4. Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – тройка некомпланарных векторов, то $\langle\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\rangle = V_g$.

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Предложение

1. *Для любых векторов* $a_1, a_2, \dots, a_k$ *справедливы включения* $a_1, a_2, \dots, a_k \in \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$.
2. *Для любых векторов* $b_1, b_2, \dots, b_m \in \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ *справедливо включение* $\langle b_1, b_2, \dots, b_m \rangle \subseteq \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$.
3. *Для любых систем векторов* $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ *и* $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ *справедливо утверждение* $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle \subseteq \langle b_1, b_2, \dots, b_m \rangle \iff (b_1, b_2, \dots, b_m) \vdash (a_1, a_2, \dots, a_k)$.
4. *Для любых систем векторов* $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ *и* $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ *справедливо утверждение* $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_m \rangle \iff (a_1, a_2, \dots, a_k) \vdash\dashv (b_1, b_2, \dots, b_m)$.
5. *Для любой системы векторов* $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ *и любого вектора* b *справедливо утверждение* $(a_1, a_2, \dots, a_k) \vdash b \iff \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_k, b \rangle$.

$\Downarrow$ Утверждение 1 очевидно: $a_j = 0a_1 + \ldots + 1a_j + \ldots + 0a_k$.
Утверждение 2 вытекает из предложения сл.10: для любого $c \in \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle$ имеем $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \vdash c$, а из $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ следует $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, поэтому $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash c$ и следовательно $c \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$.
Утверждение 3 следует из соответствующих определений и утверждения 2.
Утверждение 4 непосредственно следует из утверждения 3.
В утверждении 5 импликация $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k, b \rangle \Longrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash b$ очевидна. Из $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash b$ следует $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (a_1, a_2, \ldots, a_k, b)$ и в силу утверждения 2 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k, b \rangle \subseteq \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$. Обратное включение выполняется очевидным образом. $\Uparrow$

По аналогии с элементарными преобразованиями строк матрицы (см. сл.26 т.1-5) определим элементарные преобразования системы векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ линейного пространства V:

1. Перестановка векторов.
2. Умножение одного вектора на ненулевой скаляр.
3. Прибавление к одному вектору другого, умноженного на скаляр.

Предложение

Если одна система векторов получается из другой с помощью конечной последовательности элементарных преобразований, то линейные оболочки этих систем совпадают.

Утверждение предложения очевидным образом справедливо для одного элементарного преобразования, и потому оно выполняется для любой конечной последовательности таких преобразований.

Пусть F – поле. Через F^N обозначим множество всех последовательностей $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ с элементами из поля F. Последовательность можно рассматривать как функцию из множества натуральных чисел в поле F, поэтому $F^N = \mathcal{F}(\mathbb{N}, F)$ и это множество является линейным пространством относительно поэлементного сложения и умножения на скаляр последовательностей (см. пример 4 на сл.5).

Упражнение

Убедиться, что следующие множества последовательностей действительных чисел являются линейными пространствами:

1. множество всех сходящихся последовательностей;
2. множество всех ограниченных последовательностей;
3. множество всех бесконечно малых последовательностей.

Для облегчения соответствующей проверки можно воспользоваться предложением сл.3 т.2-4. Подмножество линейного пространства само будет линейным пространством относительно тех же операций, если оно не пусто и замкнуто относительно сложения и умножения на скаляр.

Определение

Рекуррентным соотношением называется равенство вида

$$x_{m+k} = \lambda_m x_{m+k-1} + \lambda_{m-1} x_{m+k-2} + \ldots + \lambda_2 x_{k+1} + \lambda_1 x_k, \tag{1}$$

где λ_j – элементы поля F $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Решением рекуррентного соотношения (1) называется последовательность $(\xi_1, \xi_2, \ldots) \in F^N$ такая что для любого натурального k справедливо равенство $\xi_{m+k} = \lambda_m \xi_{m+k-1} + \lambda_{m-1} \xi_{m+k-2} + \ldots + \lambda_2 \xi_{k+1} + \lambda_1 \xi_k$. Решения рекуррентных соотношений называются *рекуррентными последовательностями*.

Предложение

Множество всех решений рекуррентного соотношения (1) является линейным пространством относительно поэлементного сложения и умножения на скаляр последовательностей.

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Для задания конкретного решения рекуррентного соотношения (1) сл.17 достаточно указать *начальные условия* – конкретные значения первых m элементов последовательности. Последующие ее элементы однозначно определяются из соотношения (1).

Определение

Решение рекуррентного соотношения $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$ с начальными условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ называется *последовательностью Фибоначчи*, а ее элементы – *числами Фибоначчи*.

Первые несколько членов последовательности Фибоначчи:
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$.

Существует способ решения рекуррентных соотношений, позволяющий указывать явный вид n-го члена последовательности как функции от n (см. сл.19-21 т.2-3).