# Тема 1-8: Комплексные числа

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

**Определение**

Элементы множества $\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ называются *комплексными числами*.

**Теорема**

Относительно операций сложения и умножения матриц множество $\mathbb{C}$ является полем.

$\Downarrow$ Очевидно, что $\mathbb{C}$ замкнуто относительно сложения матриц. Проверим замкнутость относительно умножения:
$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & -bd + ac \end{pmatrix}$, что и требуется.
Так как $\mathbb{R}^{2\times 2}$ является ассоциативным кольцом с единицей (сл.8 т.1-6), $O_{2\times 2}, E_2 \in \mathbb{C}$ и $\forall A (A \in \mathbb{C} \Rightarrow -A \in \mathbb{C})$, заключаем, что $\mathbb{C}$ является ассоциативным кольцом с единицей. Убедимся, что $\mathbb{C}$ – коммутативное кольцо. Для этого вычислим
$\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca - db & cb + da \\ -da - cb & -db + ca \end{pmatrix}$. Сравнив с произведением, вычисленным выше, получаем требуемое.

Осталось проверить, что каждый ненулевой элемент кольца $\mathbb{C}$ имеет обратный в $\mathbb{C}$. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \neq O$, т.е. $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Тогда $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0$ и матрица $A$ является обратимой согласно теореме сл.36 т.1-7. По формуле сл.41 т.1-7 имеем $A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$. Теорема доказана.$\Uparrow$

Положим $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Каждый элемент поля $\mathbb{C}$ однозначно записывается в виде $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aE_2 + bI$. Элементы вида $aE_2$ ведут себя относительно операций сложения и умножения как действительные числа:

$$aE_2 + bE_2 = (a+b)E_2, (aE_2) \cdot (bE_2) = (ab)E_2,$$

поэтому комплексное число $aE_2$ отождествляют с действительным числом $a$. Таким образом, выполняется включение $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Легко проверить, что $I^2 = -E_2$. Так как $aE_2 + bI = aE_2 + (bE_2)I$, комплексное число $aE_2 + bI$ принято записывать в виде $a + bi$, где $i^2 = -1$.

### Определения

*Алгебраической формой комплексного числа* называется его запись в виде $a + bi$. Комплексное число $i$ называется *мнимой единицей*. Действительное число $a$ называется *действительной частью* числа $a + bi$, а действительное число $b$ — *мнимой частью* числа $a + bi$.

Очеивидно следующее

**Наблюдение**

Комплексные числа $a+bi$ и $c+di$ равны тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$, т.е. комплексные числа в алгебраической форме равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и мнимые части.

Заметим, что

$$(a+bi)+(c+di)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ -d & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix}= \\ =(a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)(c+di)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & d \\ -d & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix}= \\ =(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Иными словами,

*сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме осуществляется как сложение и умножение обычных многочленов с «неизвестным» $i$, при умножении дополнительно учитывается, что* $i^2=-1$.

# Комплексное сопряжение (1)

**Определение**

Если $x = a + bi$ — комплексное число, то число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным к* $x$ и обозначается через $\overline{x}$.

**Свойства операции комплексного сопряжения**

Если $x$ и $y$ — произвольные комплексные числа, то:

1) $x$ — действительное число тогда и только тогда, когда $\overline{x} = x$;
2) $x + \overline{x}$ — действительное число;
3) $x \cdot \overline{x}$ — действительное число; более того, $x \cdot \overline{x} \geqslant 0$, причем $x \cdot \overline{x} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
4) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$;
5) $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

$\Downarrow$Свойство 1 очевидно. Свойства 2 и 3 вытекают из того, что, как легко проверить, если $x = a + bi$, то $x + \overline{x} = 2a$ и $x \cdot \overline{x} = a^2 + b^2$. Свойство 4 проверяется простыми вычислениями. Для доказательства свойства 5 запишем $x = a + bi$, $y = c + di$ и вычислим
$\overline{x} \cdot \overline{y} = (a - bi)(c - di) = ac - bd - (ad + bc)i$,
$\overline{x \cdot y} = ac - db - (ad + bc)i = \overline{x}\overline{y}$.$\Uparrow$

Свойство 3 можно использовать для того, чтобы найти алгебраическую форму числа вида $\frac{a+bi}{c+di}$. В самом деле, умножив числитель и знаменатель этой дроби на число, комплексно сопряженное к знаменателю, имеем

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i.$$

Зафиксируем на плоскости прямоугольную декартову систему координат. Комплексное число $a + bi$ будем изображать точкой плоскости с координатами $(a, b)$. Тогда каждому комплексному числу будет соответствовать точка на плоскости (причем только одна) и, наоборот, каждой точке на плоскости будет соответствовать комплексное число (причем только одно). Точки оси абсцисс и только они будут изображать действительные числа, а точки оси ординат и только они — числа вида $bi$, которые называются *чисто мнимыми*. Начало координат соответствует числу 0.

## Определение

Пусть комплексное число $z = a + bi$ изображается на плоскости точкой $M$ (см. рис. 1 на следующем слайде). Тогда длина отрезка $OM$ называется *модулем* числа $z$. Если $z \neq 0$, то угол между положительным направлением оси $Ox$ и отрезком $OM$ называется *аргументом* числа $z$. У числа 0 аргумент не определен. Модуль комплексного числа $z$ обозначается через $|z|$, а аргумент — через $\arg(z)$.

На следующем рисунке $r = |z|$ и $\varphi = \arg(z)$.

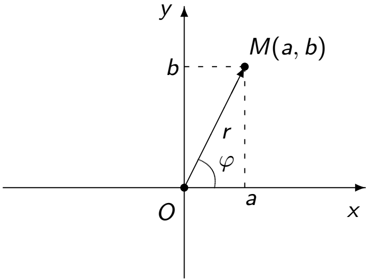


Рис. 1

Отметим, что для действительных чисел, рассматриваемых как комплексные, введенное только что понятие модуля совпадает с понятием модуля (абсолютной величины), известным из школьного курса. Аргумент комплексного числа определен неоднозначно, так как если $\varphi$ — аргумент числа $a + bi$, то $\varphi + 2\pi k$ — также его аргумент при любом целом $k$.

Как найти квадратный корень из комплексного числа, показывает следующее.

**Предложение**

Для любого комплексного числа $u \neq 0$ существуют два противоположных решения уравнения $z^2 = u$.

$\Downarrow$Пусть $u = a + bi$, $z = x + yi$, где $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Тогда $a + bi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, откуда получаем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & a, \\ 2xy & = & b. \end{array} \right. \tag{1}$$

Рассмотрим два случая.

1. $b = 0$, т.е. $u = a \in \mathbb{R}$. Тогда из второго уравнения системы (1) следует $x = 0$ или $y = 0$. При $a > 0$ имеем $y = 0$ и $x^2 = a$, откуда $x = \pm\sqrt{a}$. Это обычное извлечение корня из положительного действительного числа. При $a < 0$ имеем $x = 0$ и $-y^2 = a$, откуда $y = \pm\sqrt{-a}$ и $z = \pm i\sqrt{-a}$. Так извлекается корень из отрицательного действительного числа.

2. $b \neq 0$. Тогда $x, y \neq 0$. Возведем обе части каждого из уравнений системы (1) в квадрат и рассмотрим сумму полученных равенств:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2 \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2.$$

Таким образом, $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, так как $x, y$ – действительные числа. Прибавляя и вычитая к этому уравнению первое уравнение системы (1), получаем $x^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, $y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$. Следовательно,

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Так как $xy = \frac{b}{2}$, по знаку $x$ знак $y$ определяется однозначно и мы получаем два противоположных решения уравнения $z^2 = u$.$\Uparrow$

Для комплексного числа $u$ обозначение $\sqrt{u}$ применяется для множества из всех решений уравнения $z^2 = u$.

Покажем на примере числа $z = 3 - 4i$, как найти $\sqrt{3-4i}$. Пусть $(x + yi)^2 = 3 - 4i$. Тогда $3 - 4i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Имеем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x^2 - y^2 & = & 3, \\ 2xy & = & -4. \end{array} \right. \tag{2}$$

Подчеркнем, что нам необходимо найти действительные решения этой системы. Возведем обе части каждого из этих уравнений в квадрат и рассмотрим сумму полученных равенств:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = 25 \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)^2 = 25.$$

Получаем, что $x^2 + y^2 = 5$ (ясно, что случай $x^2 + y^2 = -5$ невозможен, поскольку $x$ и $y$ — действительные числа). Отсюда и из первого уравнения системы (2) имеем $x^2 = 4$, $y^2 = 1$, откуда $x = \pm 2$ и $y = \pm 1$. Из второго уравнения системы (2) видно, что $xy < 0$. Поэтому мы получаем два решения: $x_1 = 2$, $y_1 = -1$ и $x_2 = -2$, $y_2 = 1$. Итак, мы нашли $\sqrt{3-4i} = \{2 - i, -2 + i\}$.

Пусть $r$ — модуль, а $\varphi$ — аргумент комплексного числа $a+bi$. Ясно, что $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Следовательно,

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot i\right)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

**Определение**

Если $r$ — модуль, а $\varphi$ — аргумент комплексного числа $a+bi$, то выражение $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой записи* этого числа.

**Определение**

Если $z=x+iy$ – комплексное число, то по определению полагают $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ (здесь $e$ – основание натуральных логарифмов). В частности, $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ и тригонометрическую форму комплексного числа можно записать в виде $re^{i\varphi}$.

# Тригонометрическая форма записи комплексных чисел (примеры)

Пусть, например, $u = 1 + i$, $r = |u|$ и $\varphi = \arg(u)$. Тогда, очевидно, $r = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = 1/\sqrt{2}$ и $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$. Из двух последних равенств вытекает, что $\varphi = \pi/4$. Следовательно, тригонометрической формой записи числа $1 + i$ будет $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big)$.

Приведем еще один пример. Пусть $v = -1 + \sqrt{3}i$, $\rho = |v|$ и $\psi = \arg(v)$. Тогда $\rho = 2$, $\cos\psi = -1/2$ и $\sin\psi = \sqrt{3}/2$. Из двух последних равенств вытекает, что $\psi = 2\pi/3$. Следовательно, тригонометрической формой записи числа $v$ будет $2\big(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)\big)$.

Тригонометрическая форма комплексного числа определена неоднозначно — это вытекает из неоднозначности аргумента комплексного числа.

# Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

С помощью тригонометрической формы легко находятся произведение и частное от деления двух комплексных чисел. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] = \\
&= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big); \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).
\end{aligned}$$

Мы видим, что:

*модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов;*
*модуль частного от деления $z_1$ на $z_2$ равен частному от деления модуля $z_1$ на модуль $z_2$, а аргумент частного — разности аргументов $z_1$ и $z_2$.*

# Возведение в степень комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

Из результата о произведении комплексных чисел в тригонометрической форме вытекает, что

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{3}$$

для любого натурального $n$. Таким образом,

*при возведении комплексного числа в натуральную степень его аргумент возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.*

При $r = 1$ из формулы (3) получается равенство, известное как *формула Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

# Применение формулы Муавра

Формула Муавра оказывается удобным средством для преобразования тригонометрических выражений. Продемонстрируем это на следующем примере: выразить $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Будем исходить из равенства

$$\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5,$$

которое получено из формулы Муавра при $k = 5$. Правую его часть преобразуем по формуле бинома Ньютона (сл.12 т.1-2):

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 &= \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - \\ &- 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi = \\ &= (\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi) + \\ &+ (5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi)i.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$
$$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi.$$

С помощью тригонометрической формы комплексных чисел можно преобразовывать суммы неограниченного числа слагаемых в сумму небольшого фиксированного числа слагаемых (т.е. выполнять суммирование). Покажем на примере, как это можно делать.

Преобразовать сумму $1+\sum_{k=2}^{n+1} k\cos(k-1)\varphi$ ($\varphi$ – произвольное действительное число).

Положим
$S=1+\sum_{k=2}^{n+1} k\cos(k-1)\varphi=1+2\cos\varphi+3\cos 2\varphi+\ldots+(n+1)\cos n\varphi$,
$T=2\sin\varphi+3\sin 2\varphi+\ldots+(n+1)\sin n\varphi$, $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Тогда по формуле Муавра $S+iT=1+2(\cos\varphi+i\sin\varphi)+3(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\ldots+(n+1)(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=1+2z+3z^2+\ldots+(n+1)z^n$. Положим $U(z)=1+2z+3z^2+\ldots+(n+1)z^n$. Тогда $U(z)=(z+z^2+\ldots+z^{n+1})'$ есть производная от суммы геометрической прогрессии. Так как
$z+z^2+\ldots+z^{n+1}=z\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}=\dfrac{z^{n+2}-z}{z-1}$, имеем по формуле дифференцирования дроби

$$U(z)=\left(\frac{z^{n+2}-z}{z-1}\right)'=\frac{((n+2)z^{n+1}-1)(z-1)-z^{n+2}+z}{(z-1)^2}=$$

$$=\frac{(n+1)z^{n+2}-(n+2)z^{n+1}+1}{(z-1)^2}.$$

Преобразуем $(z-1)^2 = z^2 - 2z + 1 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi - 2\cos\varphi - 2i\sin\varphi + 1$. Так как $\cos 2\varphi - 2\cos\varphi + 1 = 2\cos^2\varphi - 2\cos\varphi = 2(\cos\varphi - 1)\cos\varphi$ и $\sin 2\varphi - 2\sin\varphi = 2(\cos\varphi - 1)\sin\varphi$, получаем $(z-1)^2 = 2(\cos\varphi - 1)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2(\cos\varphi - 1)z = -4z\sin^2\frac{\varphi}{2}$. Так как $z^{-1} = \bar{z}$, имеем $U(z) = -\dfrac{(n+1)z^{n+2} - (n+2)z^{n+1} + 1}{4z\sin^2\frac{\varphi}{2}} =$ $\dfrac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)z^n - (n+1)z^{n+1} - \bar{z}) = \dfrac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) -$ $(n+1)(\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi) - \cos\varphi + i\sin\varphi) = \dfrac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)\cos n\varphi -$ $(n+1)\cos(n+1)\varphi - \cos\varphi) + i((n+2)\sin n\varphi - (n+1)\sin(n+1)\varphi + \sin\varphi)$. Поскольку $U(z) = S + iT$, получаем

$$S = \frac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)\cos n\varphi - (n+1)\cos(n+1)\varphi - \cos\varphi)$$

и

$$T = \frac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)\sin n\varphi - (n+1)\sin(n+1)\varphi + \sin\varphi).$$

# Окончание примера

Используя тригонометрические формулы
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ и $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,
можно упростить выражения для $S$ и $T$.
В частности,
$(n+2)\cos n\varphi - (n+1)\cos(n+1)\varphi - \cos\varphi = (n+1)(\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi) +$
$\cos n\varphi - \cos\varphi = -2(n+1)\sin(n+\dfrac{1}{2})\varphi\sin(-\dfrac{1}{2}\varphi) - 2\sin\dfrac{n+1}{2}\varphi\sin\dfrac{n-1}{2}\varphi.$
Таким образом,

$$S = \frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}(n+1)\sin(n+\frac{1}{2})\varphi - \frac{1}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{n+1}{2}\varphi\sin\frac{n-1}{2}\varphi.$$

Преобразовать аналогичным образом выражение для $T$ предлагается в качестве упражнения.

Положим $z = \cos x + i\sin x$, где $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\overline{z} = \cos x - i\sin x = z^{-1}$, и $z^m + z^{-m} = 2\cos mx$. С одной стороны, $(z+\overline{z})^n = 2^n\cos^n x$. С другой стороны, по биномиальной формуле Ньютона (сл.12 т.1-2) $(z+\overline{z})^n = (z+z^{-1})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k}z^{-k}$. Так как $C_{2m}^{m+k} = C_{2m}^{m-k}$ для $k = 0, 1, \ldots, m-1$, при $n = 2m$ имеем $(z+\overline{z})^{2m} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k z^{2m-k}z^{-k} + C_{2m}^m z^m z^{-m} + \sum_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^k z^{2m-k}z^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k(z^{2m-2k} + z^{2k-2m}) + C_{2m}^m = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k(2\cos 2(m-k)x) + C_{2m}^m$. Таким образом, $2^{2m}\cos^{2m} x = 2\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k(\cos 2(m-k)x) + C_{2m}^m$, откуда

$$\cos^{2m} x = 2^{1-2m}\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + 2^{-2m}C_{2m}^m.$$

Поскольку $C_{2m+1}^{m+k+1} = C_{2m+1}^{m-k}$ для $k = 0, 1, \ldots, m$, при $n = 2m+1$ имеем $(z+\overline{z})^{2m+1} = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k z^{2m-k}z^{-k} + \sum_{k=m+1}^{2m+1} C_{2m+1}^k z^{2m+1-k}z^{-k} = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k(z^{2m+1-2k} + z^{2k-2m-1}) = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k(2\cos(2(m-k)+1)x)$. Таким образом, $2^{2m+1}\cos^{2m+1} x = 2\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2(m-k)+1)x$, откуда

$$\cos^{2m+1} x = 2^{-2m}\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2(m-k)+1)x.$$

Используя обозначения предыдущего слайда, имеем $z - \overline{z} = 2i \sin x$ и $(z - \overline{z})^{2m} = 2^{2m} i^{2m} \sin^{2m} x = 2^{2m}(-1)^m \sin^{2m} x$. Далее, аналогично выкладкам предыдущего слайда, получаем $(z - \overline{z})^{2m} = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{2m}^k z^{2m-k} z^{-k} + (-1)^m C_{2m}^m z^m z^{-m} + \sum_{k=m+1}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k z^{2m-k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{2m}^k (z^{2m-2k} + z^{2k-2m}) + (-1)^m C_{2m}^m = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{2m}^k (2\cos 2(m-k)x) + (-1)^m C_{2m}^m$. Таким образом, $2^{2m}(-1)^m \sin^{2m} x = 2\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{2m}^k (\cos 2(m-k)x) + (-1)^m C_{2m}^m$, откуда

$$\sin^{2m} x = 2^{1-2m} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + 2^{-2m} C_{2m}^m.$$

В обозначениях слайда 20, так как $z - \overline{z} = 2i \sin x$, имеем $(z - \overline{z})^{2m+1} = 2^{2m+1} i^{2m+1} \sin^{2m+1} x = 2^{2m+1} (-1)^m i \sin^{2m+1} x$. Далее, аналогично выкладкам предыдущего слайда, получаем $(z - \overline{z})^{2m+1} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_{2m+1}^k z^{2m+1-k} z^{-k} + \sum_{k=m+1}^{2m+1} (-1)^k C_{2m+1}^k z^{2m+1-k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k ((-1)^k z^{2m+1-2k} + (-1)^{2m+1-k} z^{2k-2m-1}) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m+1}^k (z^{2m+1-2k} - z^{2k-2m-1}) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m+1}^k (2i \sin(2(m-k)+1)x)$. Таким образом, $2^{2m+1} (-1)^m i \sin^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m+1}^k (2i \sin(2(m-k)+1)x)$, откуда

$$\sin^{2m+1} x = 2^{-2m} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} C_{2m+1}^k \sin(2(m-k)+1)x.$$

**Определение**

Пусть $n$ — натуральное число. *Корнем степени $n$ из комплексного числа* $z$ называется комплексное число $w$ такое, что $w^n = z$.
Множество всех корней степени $n$ из комплексного числа $z$ обозначается через $\sqrt[n]{z}$.

Если $z = 0$, то, очевидно, для любого натурального $n$ существует ровно один корень $n$-й степени из $z$, равный нулю. Пусть теперь $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $z \neq 0$. Корень степени $n$ из $z$ будем искать тоже в тригонометрической форме. Пусть $w = q(\cos\psi + i\sin\psi)$ и $w^n = z$. Тогда, в силу формулы (3),

$$q^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Получаем равенства $q^n = r$ и $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где $k$ — некоторое целое число. Поскольку $q$ и $r$ — положительные действительные числа, это означает, что $q$ — арифметический корень степени $n$ из числа $r$. Для аргумента числа $w$ справедливо равенство $\psi = (\varphi + 2\pi k)/n$. В частности, мы видим, что корень $n$-й степени из числа $z$ всегда существует.

Выясним, сколько значений может иметь корень из комплексного числа. Как мы видели, все корни $n$-й степени из числа $z$ задаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad (4)$$

где $k$ — целое число. Ясно, что $w_k = w_\ell$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} = \dfrac{\varphi+2\pi\ell}{n} + 2\pi m$ при некотором целом $m$. Последнее равенство равносильно равенству $\dfrac{k-\ell}{n} = m$. Иными словами, числа $w_k$ и $w_\ell$ совпадают тогда и только тогда, когда разность $k-\ell$ нацело делится на $n$. Таким образом, чтобы получить все различные значения корня, достаточно в формуле (4) взять $n$ последовательных значений $k$, например, последовательно приравнивать $k$ к $0, 1, \ldots, n-1$. Мы доказали, что существует ровно $n$ различных значений корня степени $n$ из произвольного ненулевого комплексного числа $z$, которые вычисляются по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (5)$$

При этом $\sqrt[n]{z} = \{w_0, \ldots, w_{n-1}\}$.

Рассмотрим пример: найти корни четвертой степени из числа $1+i$. Модуль этого числа равен $\sqrt{2}$, аргумент равен $\pi/4$. Согласно формуле (5) имеем

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3$. Получаем четыре значения корня:

$$\text{при } k = 0: \quad w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$\text{при } k = 1: \quad w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$\text{при } k = 2: \quad w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$\text{при } k = 3: \quad w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

**Определение**

*Корнем степени $n$ из единицы* называется комплексное число $\varepsilon$ такое что $\varepsilon^n = 1$.

Положим $\varepsilon_{n,k} = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$. Так как $1 = \cos 0 + i\sin 0$, имеем $\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_{n,k} | k = 0, 1, \dots, n-1\}$ – множество всех корней $n$-й степени из 1.
На комплексной плоскости корни $n$-й степени из 1 расположены на окружности радиуса 1 с центром в точке 0 в вершинах правильного $n$-угольника, одна из вершин которого расположена в точке 1.
Легко видеть, что для любого ненулевого комплексного числа $z$ и для любого $x \in \sqrt[n]{z}$ справедлива формула $\sqrt[n]{z} = x\sqrt[n]{1}$.

**Определение**

Комплексное число $\varepsilon$ называется *первообразным корнем* степени $n$ из единицы, если $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon^m \neq 1$ для всех $1 \leq m < n$.

Очевидно, что $\varepsilon_{n,1}$ – первообразный корень степени $n$ из единицы, так как $\varepsilon_{n,k} = \varepsilon_{n,1}^k$ при $k = 1, \dots, n-1$.

# Критерий первообразности корня

Следующее утверждение позволяет выделить первообразные корни степени $n$ среди элементов множества $\sqrt[n]{1}$.

**Теорема**

Число $\varepsilon_{n,k} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ $(1 < k < n)$ является первообразным корнем степени $n$ из единицы тогда и только тогда, когда числа $k$ и $n$ взаимно просты.

$\Downarrow$Пусть $\varepsilon_{n,k}$ является первообразным корнем степени $n$ из единицы. От противного, предположим, что числа $k$ и $n$ не взаимно просты. Пусть $d = (n,k)$ – наибольший общий делитель, $n = n_1 d$, $k = k_1 d$. Имеем по формуле Муавра $\varepsilon_{n,k}^{n_1} = \cos\frac{2\pi k n_1}{n} + i\sin\frac{2\pi k n_1}{n} =$ $\cos\frac{2\pi k_1 d n_1}{n} + i\sin\frac{2\pi k_1 d n_1}{n} = \cos 2\pi k_1 + i\sin 2\pi k_1 = 1$. Так как $n_1 < n$, получаем противоречие.

Предположим, что числа $k$ и $n$ взаимно просты и $\varepsilon_{n,k}^{m} = 1$. Тогда $\cos\frac{2\pi km}{n} + i\sin\frac{2\pi km}{n} = 1$, откуда $\frac{2\pi km}{n} = 2\pi q$ для некоторого целого числа $q$. Имеем $km = qn$, откуда в силу взаимной простоты $k$ и $n$ получаем, что $n$ делит $m$. Следовательно, $\varepsilon_{n,k}^{r} \neq 1$ при $1 \leq r < n$ и $\varepsilon_{n,k}$ – первообразный корень степени $n$ из единицы.$\Uparrow$

# Понятие числового поля

Множество всех комплексных чисел, как и множество всех действительных чисел, является полем относительно сложения и умножения.

**Определение**

*Числовым полем* называется произвольное множество комплексных чисел, которое является полем относительно сложения и умножения чисел.

Известными из школьного курса математики примерами числовых полей являются множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел и множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел. Наиболее широким среди числовых полей является поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Любое числовое поле содержит поле $\mathbb{Q}$. Характеристика любого числового поля (см. сл.13 т.1-4) равна нулю.