Тема 1-7: Определители

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть K – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей (в частности, поле). Для определения понятия определителя матрицы $A \in K^{n\times n}$ нам потребуются такие понятия.

Определения

Перестановкой множества $\{1, 2, \dots, n\}$ называется любой кортеж $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, где $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$. Множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначим через S_n.
Подстановкой на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ называется любая биекция этого множества на себя.

Определение перестановки согласуется с определением, данным на сл.8 т.1-2. Любой подстановке φ на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ сопоставим матрицу $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, где $\varphi(j_m) = i_m$, $m = 1, 2, \dots, n$ и $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Тогда и $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ будет перестановкой на этом множестве. Взяв $(j_1, j_2, \dots, j_n) = (1, 2, \dots, n)$ и заставив φ пробегать множество всех подстановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, получаем биекцию между ним и множеством S_n.

При любой перестановке столбцов в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$ подстановки φ получается матрица, определяющая указанным выше образом ту же самую подстановку φ.

Определение

Говорят, что перестановка $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ получается из перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ *транспозицией* символов i_p и i_q, если $j_m = i_m$ при $m \notin \{p, q\}$ и $j_p = i_q$, $j_q = i_p$. Транспозиция называется *смежной*, если $q = p + 1$.

Теорема

Все $n!$ элементов множества перестановок S_n можно расположить в виде последовательности так, что каждая последующая перестановка получается из предыдущей с помощью одной транспозиции. При этом начать можно с любой перестановки.

$\Downarrow$Используем индукцию по n. При $n = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что для всех $1 \leq m < n$ требуемое доказано. Запишем любую перестановку $(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Применяя предположение индукции к перестановке $(i_2, \dots, i_n)$, получим расположение $(n-1)!$ перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ с первым элементом i_1. В последней перестановке $(i_1, j_2, \dots, j_n)$ сделаем транспозицию символов i_1 и j_2 и снова применим предположение индукции. В последней перестановке этого расположения сделаем транспозицию первого элемента с элементом, отличным от i_1. Продолжая этот процесс, за n шагов получим требуемое.$\Uparrow$

Определение

Говорят, что элементы i_p, i_q образуют *инверсию* в перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, если $p < q$ и $i_p > i_q$. Количество инверсий в перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ обозначим через $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Например, $I(3, 5, 6, 1, 2, 4) = 2 + 3 + 3 = 8$.

Определение

Перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ называется *четной* [*нечетной*], если $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ – четное [нечетное] число.

Теорема

Одна транспозиция меняет четность перестановки.

$\Downarrow$Утверждение теоремы очевидно для смежной транспозиции. Предположим, что в транспозиции переставляются элементы i_p и i_q, где $p < q$. Тогда эту транспозицию можно осуществить с помощью $q - p$ смежных транспозиций, переставив i_p на место q-го элемента и затем с помощью $q - p - 1$ смежных транспозиций переставить i_q на место p-го элемента. Таким образом, четность перестановки изменяется нечетное число раз.$\Uparrow$

Из теорем сл.3 и 4 получается такое

Следствие

Количество четных перестановок в множестве S_n равно количеству нечетных перестановок и равно $\frac{n!}{2}$.

Рассмотрим подстановку φ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, которой соответствует матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$. Переставляя столбцы этой матрицы, получаем матрицу $\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix}$. В силу теорем сл.3 и 4 сумма $I(s_1, s_2, \ldots, s_n) + I(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ сохраняет четность при любой перестановке столбцов матрицы.

Определение

Подстановка φ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, которой соответствует матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, называется *четной* [*нечетной*], если $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ – четное [нечетное] число.

Пусть K – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей (в частности, поле), $A \in K^{n\times n}$. Перестановку $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ обозначим через σ.

Определение

Определителем матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ называется элемент кольца K, равный $\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n}$.

Развернутое обозначение определителя: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Обозначение определителя как функции от матрицы: $|A|$. Таким образом,

Определитель матрицы порядка n представляет собой сумму $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение $a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n}$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой ее строки и каждого столбца, если перестановка σ четная, и $-a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n}$, если перестановка σ нечетная.

Отметим, что знак при $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$, где $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$ – подстановка, определяется четностью этой подстановки (минус, если нечетная).

Развернутая запись определителя похожа на запись матрицы, но разница между ними существенная. Элементы матрицы определителя называются его *элементами*. Аналогично можно говорить о *строках* или *столбцах* определителя. Порядок матрицы определителя называют *порядком* определителя.

Определитель первого порядка равен своему единственному элементу.

Из определения, поскольку $I(1,2)=0$, $I(2,1)=1$, получаем важную формулу для вычисления определителя второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Аналогично, так как $I(1,2,3)=0$, $I(2,3,1)=2$, $I(3,1,2)=2$, $I(2,1,3)=1$, $I(3,2,1)=3$, $I(1,3,2)=1$, получаем формулу для определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Правило треугольников

Формула для вычисления определителя третьего порядка выглядит весьма громоздко. Существует несколько приемов для того, чтобы запомнить эту формулу. Опишем один из них, называемый *правилом треугольников*.

Со знаком “плюс” берется произведение элементов, образующих главную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком “минус” – произведение элементов, образующих побочную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали.

На рис. 1 приведена графическая иллюстрация правила треугольников.

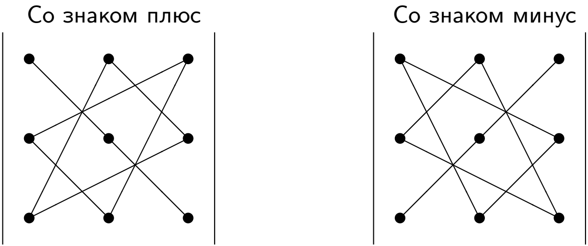

Рис. 1

1. $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 28 = 12; \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 42 - (-27) = 69.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 7 \\ 8 & -6 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) \cdot 9 + 5 \cdot 7 \cdot 8 + (-1) \cdot 2 \cdot (-6) - (-1) \cdot (-4) \cdot 8 -$
$5 \cdot 2 \cdot 9 - 3 \cdot 7 \cdot (-6) = -108 + 280 + 12 - 32 - 90 + 126 = -188.$

Свойство 1

Имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$\Downarrow$Для доказательства запишем правую часть по определению: $\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\dots(a_{i\sigma_i}+b_{i\sigma_i})\dots a_{n\sigma_n}$. Раскрывая скобки и переставляя слагаемые, получаем $\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\dots a_{i\sigma_i}\dots a_{n\sigma_n}+$ $+\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\dots b_{i\sigma_i}\dots a_{n\sigma_n}$, последнее выражение совпадает с правой частью требуемого равенства.$\Uparrow$

Свойство 2

Общий множитель всех элементов одной строки определителя можно вынести за знак определителя, т.е. имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$\Downarrow$Доказательство получается с помощью равенства
$\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\dots(\lambda a_{i\sigma_i})\dots a_{n\sigma_n} =$
$\lambda(\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\dots a_{i\sigma_i}\dots a_{n\sigma_n}).\Uparrow$

Из свойства 2 непосредственно вытекает

Свойство 3

Определитель матрицы, содержащей нулевую строку, равен нулю.

Свойство 4

Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки, равен нулю.

$\Downarrow$Пусть матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ имеет совпадающие строки: $a_{ij} = a_{mj}$ для $j = 1, 2, \ldots, n$, $1 \leq i < m \leq n$. Рассмотрим произвольное слагаемое определителя $|A|$ $u_\sigma = (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{i\sigma_i} \ldots a_{m\sigma_m} \ldots a_{n\sigma_n}$. Обозначим через τ перестановку, полученную из σ транспозицией элементов σ_i и σ_m. Тогда в силу теоремы сл.4 имеем $(-1)^{I(\sigma)} = -(-1)^{I(\tau)}$. Кроме того, по предположению получаем $a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{i\sigma_i} \ldots a_{m\sigma_m} \ldots a_{n\sigma_n} = a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{i\sigma_m} \ldots a_{m\sigma_i} \ldots a_{n\sigma_n} = a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \ldots a_{i\tau_i} \ldots a_{m\tau_m} \ldots a_{n\tau_n}$. Таким образом, слагаемое u_σ взаимно уничтожается в сумме, выражающей определитель $|A|$. Так как взято произвольное слагаемое определителя, теорема доказана.$\Uparrow$

Из свойств 2 и 4 вытекает

Свойство 5

Определитель, имеющий две пропорциональные строки, равен нулю.

Из свойств 1 и 5 получается

Свойство 6

Если к элементам одной строки определителя прибавить элементы некоторой другой строки, умноженные на один и тот же элемент поля, то полученный определитель будет равен исходному.

Свойство 7

Если в определителе Δ поменять местами две строки, сохранив расположение остальных строк, то полученный определитель будет равен $-\Delta$.

$\Downarrow$Для доказательства заметим, что на основании свойств 3, 1 и 4

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(мы не выписываем после второго знака равенства определители с совпадающими строками), откуда следует требуемое.$\Uparrow$

Свойство 8

Пусть $A \in F^{n \times n}$. Тогда $|A^\top| = |A|$.

$\Downarrow$Пусть $A = (a_{ij})$. Тогда произведение элементов $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$ матрицы A входит в качестве слагаемого в определители $|A|$ и $|A^\top|$ с одинаковым знаком, определяемым четностью подстановки $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$, откуда следует требуемое.$\Uparrow$

Из доказанного утверждения вытекает принцип "равноправия строк и столбцов" в определителе: для каждого свойства определителей, формулируемого в терминах строк, справедливо аналогичное свойство для столбцов. Таким образом, для столбцов определителя справедливы аналоги свойств 1-7.

Из свойств 2, 6, 7 получаем следующее утверждение.

Предложение 1

Пусть $A, B \in F^{n \times n}$ и матрица A получается из матрицы B с помощью конечного числа элементарных преобразований строк, то $|A| = 0$ тогда и только тогда, когда $|B| = 0$.

По аналогии с элементарными преобразованиями строк матрицы (см. сл.26 т.1-5) определяются элементарные преобразования столбцов. Применяя принцип "равноправия строк и столбцов" , получаем

Предложение 2

Пусть $A, B \in F^{n \times n}$ и матрица A получается из матрицы B с помощью конечного числа элементарных преобразований строк или столбцов (в любой последовательности), то $|A| = 0$ тогда и только тогда, когда $|B| = 0$.

Определитель треугольной матрицы

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов на ее главной диагонали.

В таком определителе единственное ненулевое слагаемое - это $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ (со знаком плюс).

Определитель единичной матрицы

Определитель единичной матрицы любого порядка равен единице.

Определитель матрицы, у которой выше или ниже побочной диагонали нули.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}.$$

В таком определителе единственное ненулевое слагаемое - это $a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}$ со знаком $(-1)^{I(n,n-1,\ldots,1)}$. Так как $I(n,n-1,\ldots,1) =$ $= (n-1)+(n-2)+\ldots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$, получаем требуемое равенство.

Важное обозначение

Для матрицы $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$ обозначим через $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ определитель $\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$ порядка k, составленный из элементов матрицы A.

Здесь индексы $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ и $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$, они не обязательно различны и не обязательно идут в порядке возрастания.

В частности, при $k > m$ или $k > n$ всегда $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} = 0$.

Определение

При $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le m$ и $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$ определитель $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ называется *минором* порядка k матрицы A.

Таким образом, минор порядка k – это определитель квадратной подматрицы порядка k матрицы A.

Определение

Дополнительным минором минора $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ квадратной матрицы A порядка n называется минор квадратной подматрицы порядка $n-k$, полученной из матрицы A вычеркиванием строк с номерами $i_1, \dots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \dots, j_k$.

Обозначение: $\overline{A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}}$.

Фактически $\overline{A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}} = A\begin{pmatrix} i'_1 & i'_2 & \dots & i'_{n-k} \\ j'_1 & j'_2 & \dots & j'_{n-k} \end{pmatrix}$, где $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ вместе с $1 \le i'_1 < i'_2 < \dots < i'_{n-k} \le n$ и $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$ вместе с $1 \le j'_1 < j'_2 < \dots < j'_{n-k} \le n$ образуют полную систему индексов $\{1, 2, \dots, n\}$.

Определение и обозначение

Алгебраическим дополнением минора $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ называется

$$A_{adj}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}\overline{A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}}.$$

Пример

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\overline{A\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14 \text{ и}$$

$$A_{adj}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (-1)^{1+3+5+2+4+5}\overline{A\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}} = -14.$$

Лемма

Пусть $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$. Произведение минора $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ и его алгебраического дополнения $A_{adj}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ является суммой $m!(n-m)!$ различных слагаемых определителя $|A|$ с нужными знаками.

$\Downarrow$Сначала рассмотрим случай, когда $i_\ell = j_\ell = \ell$ при $\ell = 1, \dots, m$. Очевидно, что в этом случае

$$A_{adj}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \overline{A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}}.$$ Обозначим $\Delta = |A|$.

Запишем $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ Тогда

любое слагаемое минора имеет вид $(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} \dots a_{m\sigma_m}$, где σ – некоторая перестановка чисел $1, \dots, m$, а любое слагаемое дополнительного минора имеет вид $(-1)^{I(\tau)} a_{m+1,\tau_1+m} \dots a_{n,\tau_{n-m}+m}$. где τ – перестановка чисел $1, \dots, n-m$.

Количество слагаемых в миноре равно $m!$, в дополнительном миноре $(n-m)!$, поэтому в произведении при раскрытии скобок будет $m!(n-m)!$ различных слагаемых. Любое произведение слагаемых минора и дополнительного минора равно $(-1)^{I(\sigma)+I(\tau)}a_{1\sigma_1}\ldots a_{m\sigma_m}a_{m+1,\tau_1+m}\ldots a_{n,\tau_{n-m}+m}$. Произведение элементов определителя входит в Δ со знаком $(-1)^{I(\rho)}$, где $\rho=(\sigma_1,\ldots,\sigma_m,\tau_1+m,\ldots,\tau_{n-m}+m)$. Очевидно, что ни один элемент σ_j не образует инверсию ни с одним элементом τ_k+m, поэтому $I(\rho)=I(\sigma)+I(\tau)$, и в рассматриваемом случае утверждение доказано.

Теперь рассмотрим общий случай. Переставим в определителе Δ строки так, чтобы строка i_1 стала первой по порядку (требуется i_1-1 перестановка строк), строка i_2 – второй (требуется i_2-2 перестановок строк) и так далее, i_m стала m-й (требуется i_m-m перестановок строк). Всего потребуется $i_1+\ldots+i_m-(1+\ldots+m)$ перестановок строк. Затем аналогично переставим столбцы так, чтобы $j_1,\ldots,j_m$ стали на место $1,\ldots,m$. Всего потребуется $j_1+\ldots+j_m-(1+\ldots+m)$ перестановок столбцов. Получили определитель $\Delta_1=(-1)^s\Delta$, где $s=i_1+\ldots+i_m+j_1+\ldots+j_m-$ $-2(1+\ldots+m)$. Таким образом, слагаемые определителей Δ_1 и Δ отличаются множителем $(-1)^{i_1+\ldots+i_m+j_1+\ldots+j_m}$. Применяя к Δ_1 доказанное в начале утверждение, получаем требуемое.⇑

Теорема

Пусть $A \in F^{n\times n}$. Определитель матрицы A равен сумме произведений всевозможных миноров, выбранных в зафиксированных m $(1 \le m < n)$ строках (соответственно столбцах) матрицы A, на их алгебраические дополнения.

Для строк имеем формулу:

$$|A| = \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_m\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_m \end{pmatrix} A_{adj}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_m \end{pmatrix},$$

а для столбцов —

$$|A| = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_m\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_m \end{pmatrix} A_{adj}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_m \end{pmatrix}.$$

$\Downarrow$Обозначим $\Delta = |A|$. Рассмотрим случай строк, для столбцов доказательство проводится аналогично. По лемме сл.20 произведение минора, взятого в выбранных строках, на его алгебраическое дополнение, равно сумме $m!(n-m)!$ различных слагаемых определителя Δ с нужными знаками. Если взять различные миноры, то их произведения на алгебраические дополнения не имеют общих слагаемых. В самом деле, каждое слагаемое $(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma_1}\dots a_{n\sigma_n}$ определителя Δ определяется подстановкой $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$, и для произведения слагаемого минора $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ на слагаемое его алгебраического дополнения соответствующая подстановка отображает множество номеров строк этого минора $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ на множество номеров его столбцов $\{j_1, j_2, \dots, j_m\}$. Но для различных миноров множества номеров их столбцов различаются. Количество миноров порядка m, которые можно выбрать в фиксированных m строках определителя порядка n, равно числу способов выбрать m столбцов из n имеющихся столбцов, т.е. равно $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Следовательно, указанная в формулировке сумма произведений всевозможных миноров, выбранных в зафиксированных m строках Δ, на их алгебраические дополнения, содержит $C_n^m m!(n-m)! = n!$ слагаемых определителя Δ с нужными знаками, т.е. все слагаемые определителя Δ. Теорема доказана.$\Uparrow$

Разложение определителя по строке

Рассмотрим определитель Δ порядка n. Элемент a_{ij} этого определителя является минором 1-го порядка его матрицы. Алгебраическое дополнение этого минора будем обозначать через A_{ij}.
Применяя теорему Лапласа к i-й строке определителя Δ, получаем

Правило разложения определителя по строке

Определитель равен сумме произведений элементов своей фиксированной строки на их алгебраические дополнения, т.е. имеет место равенство $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$.

Применяя это утверждение к выражению $a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{kn}A_{in}$ при $k \neq i$, заключаем, что оно равно определителю Δ_1, полученому из Δ заменой i-й строки на k-ю. Согласно свойству 4 $\Delta_1 = 0$. Следовательно, получаем

Наблюдение

При $k \neq i$ имеет место равенство $a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{kn}A_{in} = 0$, которое формулируется так: сумма произведений элементов строки определителя на алгебраические дополнения к соответствующим элементам другой строки равна нулю.

Применяя теорему Лапласа к столбцу определителя Δ порядка n, получаем утверждения, аналогичные утверждениям сл.24.

Правило разложения определителя по столбцу

Определитель равен сумме произведений элементов своего фиксированного столбца на их алгебраические дополнения, т.е. имеет место равенство $\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$.

Наблюдение

При $k \neq j$ имеет место равенство $a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \ldots + a_{nk}A_{nj} = 0$, которое формулируется так: сумма произведений элементов столбца определителя на алгебраические дополнения к соответствующим элементам другого столбца равна нулю.

Функция $\delta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$, определяемая правилом $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, позволяет записать результаты сл.25 и 26 в виде формул

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}A_{jm} = \delta_{ij}\Delta; \sum_{m=1}^{n} a_{mj}A_{mk} = \delta_{jk}\Delta. \qquad (1)$$

Определитель полураспавшейся матрицы

Матрица $A \in F^{n\times n}$ называется *полураспавшейся*, если ее можно разбить на блоки так, что $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ U & Z \end{pmatrix}$, где $X \in F^{m\times m}$, $Y \in F^{m\times(n-m)}$, $U \in F^{(n-m)\times m}$, $Z \in F^{(n-m)\times(n-m)}$ и $U = O$ или $Y = O$. Если $U = O$ и $Y = O$, то матрица A называется *распавшейся*.

Теорема

Если $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ U & Z \end{pmatrix}$ – полураспавшаяся матрица, то $|A| = |X| \cdot |Z|$.

$\Downarrow$Предположим, что $U = O$ и применим теорему Лапласа к строкам с $m+1$-й по n-ю в $|A|$ (единственный ненулевой минор в этих строках стоит в $m+1$-м — n-м столбцах, его алгебраическое дополнение совпадает с дополнительным минором): $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} . \Uparrow$

Теорема

Пусть $A, B \in F^{n \times n}$. Тогда $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

$\Downarrow$ Рассмотрим блочную матрицу $C = \begin{pmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{pmatrix}$ и вычислим $|C|$ двумя способами. По теореме сл.26 имеем $|C| = |A| \cdot |B|$. С другой стороны, умножая j-й столбец на b_{jm} и последовательно прибавляя к $(n+m)$-му столбцу при всех $j = 1, \ldots, n$ для каждого $m = 1, \ldots, n$, получим

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -1 & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & \ldots & a_{11}b_{1n} + \ldots + a_{1n}b_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & a_{n1}b_{11} + \ldots + a_{nn}b_{n1} & \ldots & a_{n1}b_{1n} + \ldots + a_{nn}b_{nn} \\ -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, $|C| = \begin{vmatrix} A & A \cdot B \\ -E_n & O \end{vmatrix}$. Для вычисления последнего определителя применим теорему Лапласа к строкам с $(n+1)$-й по $2n$-ю:
$\begin{vmatrix} A & A \cdot B \\ -E_n & O \end{vmatrix} = |-E_n|(-1)^{n+1+\ldots+2n+1+\ldots+n}|A \cdot B| =$
$(-1)^n(-1)^{n+1+\ldots+2n+1+\ldots+n}|A \cdot B| = |A \cdot B|$, так как показатель при -1 равен $n+n+1\ldots+2n+1+\ldots+n = n+\frac{n(3n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n+3n^2+n+n^2+n}{2} = 2n^2+2n.\Uparrow$

Утверждение сл.16 можно использовать для вычисления определителя произвольной матрицы. В теореме сл.30 т.1-5 было доказано, что произвольную квадратную матрицу A можно с помощью элементарных преобразований строк привести к верхнетреугольной матрице B. Свойства 2, 6, 7 и принцип равноправия строк и столбцов показывают, как связаны $|A|$ и $|B|$. Вычислив $|B|$ как определитель треугольной матрицы, можно найти и $|A|$.

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -63 & 28 \\ 0 & 0 & -63 & 54 \end{vmatrix} = \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -63 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 26 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1 \cdot (-4) \cdot (-63) \cdot 26}{8 \cdot 9 \cdot 7} = 13.$$

Окончание примера

На первом шаге мы, воспользовавшись свойством 6, прибавили ко второй строке первую, умноженную на -1, к третьей – первую, умноженную на -2, а к четвертой – первую, умноженную на -3. На втором шаге умножили третью и четвертую строки на 4 и 2 соответственно и воспользовались свойством 2. На третьем шаге мы, вновь воспользовавшись свойством 6, прибавили к третьей строке вторую, умноженную на 1, а к четвертой – вторую, умноженную на -1. На четвертом шаге умножили третью и четвертую строки на 7 и 9 соответственно и воспользовались свойством 2. На пятом – прибавили к четвертой строке третью, умноженную на -1, еще раз использовав свойство 6, а на шестом – вычислили определитель треугольной матрицы.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Первую строку прибавим ко второй, умножим первую строку на -2 и прибавим к третьей, вычтем первую строку из четвертой. Полученный определитель разложим по третьему столбцу. В определителе третьего порядка умножим вторую строку на -2 и прибавим к первой; полученный определитель разложим по первой строке и придем к определителю второго порядка. Получаем

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 3 = -9.$$

Реализованный в этом примере способ вычисления определителя называется *понижением порядка определителя*.

Рассмотрим примеры вычисления определителей порядка n.

1. Для данных чисел a, b вычислить следующий определитель порядка n:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Преобразуем его, прибавив к 1-й строке последовательно 2-ю, 3-ю и все остальные, затем вынося из первой строки общий множитель $a + (n-1)b$ и прибавляя ко всем строкам, начиная со второй, первую строку, умноженную на $-b$. Наконец, воспользуемся правилом вычисления определителя треугольной матрицы.

$$\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

2. Пусть n — натуральное число, $a_1, a_2 \ldots, a_n$ — произвольные скаляры из поля F. *Определителем Вандермонда* называется следующий определитель порядка n:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Докажем, что при любом n определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей $a_i - a_j$, где $1 \leq j < i \leq n$:

$$d = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

Воспользуемся индукцией по n.

При $n = 2$ очевидно, что $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$. Пусть утверждение уже доказано для определителей Вандермонда порядка $n-1$. Преобразуем определитель (2) следующим образом: для каждого $k = n, n-1, \ldots, 2$ из k-й его строки вычтем $(k-1)$-ю, умноженную на a_1. Тогда

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \ldots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Разлагая полученный определитель по первому столбцу, мы получим определитель $(n-1)$-го порядка. Вынося из k-го столбца множитель $a_k - a_1$ при $k = 2, \ldots, n$, приходим к равенству

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Последний множитель является определителем Вандермонда порядка $n-1$. Применяя предположение индукции, из формулы (3) получаем требуемое.

Из полученного результата следует

Предложение

Определитель Вандермонда порядка n, построенный на скалярах $a_1, a_2, \ldots, a_n$, равен нулю тогда и только тогда, когда $a_j = a_k$ при некоторых $1 \leq j < k \leq n$, и определитель Вандермонда порядка n, построенный на различных скалярах $a_1, a_2, \ldots, a_n$, всегда отличен от нуля.

Определение обратимой матрицы см. на сл.27 т.1-6. Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля. Следующая теорема дает критерий обратимости матрицы.

Теорема

Матрица является обратимой тогда и только тогда, когда она невырожденная.

$\Downarrow$ Пусть квадратная матрица A порядка n обратима. Тогда по определению существует матрица B такая, что $A \cdot B = B \cdot A = E_n$. По теореме сл.27, учитывая, что $|E_n| = 1$, имеем $1 = |A \cdot B| = |A||B|$, откуда непосредственно следует, что $|A| \neq 0$, т.е. матрица A является невырожденной.

Обратно, предположим, что квадратная матрица A порядка n невырожденная. Рассмотрим матрицу, составленную следующим образом из алгебраических дополнений элементов определителя $|A|$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Она получается из матрицы A заменой каждого ее элемента на его алгебраическое дополнение в определителе $|A|$ и последующим транспонированием, и называется *присоединенной матрицей* матрицы A.

Вычислим $A \cdot \tilde{A}$, используя формулу (1) сл.26.

$$A \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{n} a_{im} A_{jm} \right)_{n \times n} = (\delta_{ij} |A|)_{n \times n} = |A| E_n.$$

Аналогично вычислим произведение $\tilde{A} \cdot A$:

$$\tilde{A} \cdot A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{n} A_{mj} a_{mk} \right)_{n \times n} = \left(\sum_{m=1}^{n} a_{mk} A_{mj} \right)_{n \times n} = (\delta_{jk} |A|)_{n \times n} = |A| E_n.$$

Помня, что матрица A невырожденная, положим

$$B = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

и покажем, что B является матрицей, обратной к A. Из того, что $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = |A| E_n$ в силу свойства 4 умножения матриц (сл.15 т.1-6) вытекает $A \cdot B = B \cdot A = E_n$. $\Uparrow$

Из доказательства теоремы на сл.39 получается следующая формула для нахождения обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}.$$

Следствие

Пусть A — квадратная матрица порядка n, а матрица B такова, что $A \cdot B = E_n$. Тогда матрица A обратима, $B = A^{-1}$ и $B \cdot A = E_n$.

$\Downarrow$ Из равенства $A \cdot B = E_n$, беря определители левой и правой части, получаем $|A \cdot B| = |E_n|$, откуда в силу теоремы сл.26 следует $|A||B| = 1$. Таким образом, $|A| \neq 0$ и матрица A – невырожденная. По теореме сл.38 она является обратимой. Поскольку обратная матрица A^{-1} является единственным решением матричного уравнения $A \cdot X = E_n$, заключаем, что $B = A^{-1}$. Равенство $B \cdot A = E_n$ теперь очевидно.$\Uparrow$

Это утверждение показывает, что матричное уравнение $A \cdot X = E_n$ либо имеет единственное решение, совпадающее с A^{-1}, либо не имеет решений. Таким образом, первый способ нахождения обратной матрицы полностью обоснован.

Пусть A – обратимая матрица. Из равенства $A \cdot A^{-1} = E$, вычисляя определители левой и правой части, выводим $|A||A^{-1}| = |E|$. Таким образом, $|A||A^{-1}| = 1$. Отсюда получаем формулу, связывающую определители обратимой матрицы A и ее обратной матрицы: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Формула сл.40 дает еще один способ нахождения обратной матрицы (первый способ см. на сл.33 т.1-6). Этот способ особенно удобен для матриц второго порядка, так как можно выписать следующую формулу для обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Для матриц порядка n указанный выше способ требует вычисления n^2 определителей порядка $n-1$, поэтому на практике для матриц порядка больше 3 он не применяется.

Рассмотрим пример обращения матрицы порядка 3 этим способом. Вычислим матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сначала вычислим алгебраические дополнения к элементам первой строки определителя $|A|$:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$; $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$;

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$.

Находим определитель $|A| = A_{11} + 2A_{12} + A_{13} = 3 \neq 0$, поэтому матрица A^{-1} существует (и единственна). Продолжаем вычисление алгебраических дополнений. $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$; $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$;

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$; $A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$;

Окончание примера

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3; \; A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Запишем матрицу из алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем эту матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 6 & -3 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Все элементы матрицы $\tilde{A}$ разделим на $\det(A) = 3$. Получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 & 4/3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Система линейных уравнений называется *крамеровской*, если число уравнений в ней равно числу неизвестных. Рассмотрим крамеровскую систему линейных уравнений в общем виде:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right. \qquad (6)$$

Введем следующие определители для этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Здесь Δ называется *главным определителем* крамеровской системы (6), а определитель Δ_i получается из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов уравнений и называется *определителем при неизвестном* x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Следующее утверждение называется теоремой (или правилом) Крамера.

Теорема

Если главный определитель Δ крамеровской системы линейных уравнений отличен от нуля, то она является определенной и ее единственное решение есть $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$, т.е. $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ (формулы Крамера).

$\Downarrow$Запишем крамеровскую систему в матричном виде:

$$Ax = b. \tag{7}$$

Пусть $\Delta \neq 0$. Так как $\Delta = |A|$, в силу критерия обратимости (сл.38) матрица A обратима. Матричное уравнение (7) имеет единственное решение $x = A^{-1}b$. Применяя для обратной матрицы формулу сл.41, имеем $x = \frac{1}{|A|}\tilde{A}b$. Расписывая это матричное равенство, получаем систему равенств

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}}{|A|},$$
$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2}}{|A|},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \frac{b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn}}{|A|}.$$

В знаменателях правых частей полученных равенств стоит определитель Δ, а в числителях — определители $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, разложенные соответственно по первому, второму и так далее, n-му столбцу. Этим требуемое доказано.$\Uparrow$

Рассмотрим пример применения теоремы Крамера. Требуется решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 7x - 6y = 4; \\ 9x - 8y = -7. \end{cases}$$

Вычислим главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 9 & -8 \end{vmatrix} = -56 + 54 = -2.$$

По теореме Крамера система имеет единственное решение. Вычислим определители при неизвестных:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -7 & -8 \end{vmatrix} = -32 - 42 = -74, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 9 & -7 \end{vmatrix} = -49 - 36 = -85.$$

Получаем ответ:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 37, \; y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -42\frac{1}{2}.$$

Теорему Крамера наиболее удобно использовать для решения крамеровских систем линейных уравнений с двумя неизвестными.

Рассмотрим пример применения теоремы Крамера для решения крамеровской системы с тремя неизвестными. Решим систему

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28; \\ 7x + 3y - 6z = -1; \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$$

Вычислим главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -9 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 348.$$

По теореме Крамера система имеет единственное решение. Вычислим определители при неизвестных:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 28 & -4 & 9 \\ -1 & 3 & -6 \\ 5 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 28\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -9 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & -9 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 696,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 28 & 9 \\ 7 & -1 & -6 \\ 7 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & -9 \end{vmatrix} - 28\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 1044,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 28 \\ 7 & 3 & -1 \\ 7 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 28\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1392.$$

Находим решение системы:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3,\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 4.$$

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$ порядка n.

Обозначим указанный в условии определитель через Δ_n и разложим его по 1-й строке: $\Delta_n = (\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha \begin{vmatrix} \beta & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Второй определитель разложим по 1-му столбцу: $\begin{vmatrix} \beta & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \beta\Delta_{n-2}$. Таким образом, получаем рекуррентное соотношение $\Delta_n = (\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}$.

Решим это соотношение. Составляем характеристическое уравнение (подставляем в соотношение x^n вместо Δ_n), получаем $x^n = (\alpha+\beta)x^{n-1} - \alpha\beta x^{n-2}$. Затем сокращаем на x^{n-2}, переносим все слагаемые в левую часть: $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни $x_1 = \alpha$ и $x_2 = \beta$. Рассмотрим два возможных случая.
1. $\alpha \neq \beta$. В этом случае ищем Δ_n в виде $C_1\alpha^n + C_2\beta^n$, где C_1, C_2 – постоянные, не зависящие от n. Непосредственно вычисляем $\Delta_1 = \alpha + \beta$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha \\ \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$. Записываем систему линейных уравнений: $\begin{cases} C_1\alpha + C_2\beta = \alpha+\beta, \\ C_1\alpha^2 + C_2\beta^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2. \end{cases}$ Решая эту систему по правилу Крамера, получаем $C_1 = -\frac{\alpha}{\beta-\alpha}$, $C_2 = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$. Таким образом, $\Delta_n = -\dfrac{\alpha}{\beta-\alpha}\alpha^n + \dfrac{\beta}{\beta-\alpha}\beta^n = \dfrac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$.

2. $\alpha = \beta$. В этом случае ищем Δ_n в виде $\alpha^n(C_1 + nC_2)$, где C_1, C_2 – постоянные, не зависящие от n. Непосредственно вычисляем $\Delta_1 = 2\alpha$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{vmatrix} = 3\alpha^2$. Записываем систему линейных уравнений: $\begin{cases} \alpha(C_1 + C_2) = 2\alpha, \\ \alpha^2(C_1 + 2C_2) = 3\alpha^2. \end{cases}$ Если $\alpha = 0$, то $\Delta_n = 0$. Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда $C_1 + C_2 = 2$, $C_1 + 2C_2 = 3$, откуда $C_1 = C_2 = 1$. Таким образом, $\Delta_n = (n+1)\alpha^n$.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Применяем теорему Лапласа (сл.22) к 2-му и 4-му столбцам данного определителя. Если минор 2-го порядка, стоящий в этих столбцах, содержит 2-ю, 4-ю или 5-ю строки, то он равен 0. Поэтому отличен от нуля лишь минор, содержащий 1-ю и 3-ю строки. Имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{1+3+2+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6.$$