Тема 1-6: Матрицы и действия над ними

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Определение

Напомним, что *матрицей размеров* $m \times k$ над множеством M называется прямоугольная таблица из элементов M, имеющая m строк и k столбцов. Элементы множества M, из которых состоит матрица, называются ее *элементами*.

Принято записывать матрицы размеров $m \times k$ в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Кратко матрица (1) записывается в виде $A = (a_{ij})_{m\times k}$. Для указания размеров матрицы без обозначения элементов будем использовать обозначение $A_{m\times k}$.

Часто бывает удобно записывать элемент из i-й строки и j-го столбца матрицы A как $A[i,j]$.

Обозначать матрицы будем преимущественно заглавными латинскими буквами. Примеры матриц:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & \pi & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & \pi \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & \pi & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

При этом $X[2,3] = \pi$, $Y[1,2] = 2$, $Z[3,1] = -1$.

Определение

Матрицы $A_{m\times k}$ и $B_{n\times \ell}$ называются *равными*, если их размеры совпадают (т.е. $m=n$, $k=\ell$) и элементы, стоящие на соответствующих местах, также совпадают: $A[i,j]=B[i,j]$ при всех i,j, пробегающих независимо друг от друга значения $i=1,\dots,m$ и $j=1,\dots,k$.

Множество всех матриц размеров $m\times k$ с элементами из фиксированного поля F будем обозначать через $F^{m\times k}$.
Если в определенной матрице зафиксировать какие-либо строки и столбцы и рассмотреть матрицу, образованную элементами, стоящими на пересечении выделенных строк и столбцов, то полученная матрица называется *подматрицей* исходной матрицы. Например, на слайде 3 матрицы Y и Z являются подматрицами матрицы X.
Матрица $A_{m\times k}$ называется *строкой* [соответственно *столбцом*], если $m=1$ [соответственно $k=1$]. Строки и столбцы будем обозначать малыми буквами.

Если матрица A имеет размеры $m \times m$, то ее называют *квадратной матрицей порядка* m и обозначают так: A_m. Множество всех квадратных матриц порядка n над полем F будем обозначать через $F^{n\times n}$.

Как отмечалось в т.1-5, элементы $A[1,1], A[2,2], \ldots, A[m,m]$ образуют главную диагональ квадратной матрицы A. Элементы $A[m,1], A[m-1,2], \ldots, A[1,m]$ образуют ее *побочную диагональ*.

Мы говорим, что элемент $A[i,j]$ стоит ниже [соотв. выше] главной диагонали квадратной матрицы A_m, если $i > j$ [соотв. $i < j$]. Квадратная матрица называется *верхнетреугольной* [соотв. *нижнетреугольной*], если все ее элементы, стоящие ниже [соотв. выше] главной диагонали, равны 0.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если она верхнетреугольная или нижнетреугольная. Квадратная матрица называется *диагональной*, если она верхнетреугольная и нижнетреугольная, т.е. все элементы вне главной диагонали равны 0. Квадратную матрицу порядка n с элементами $a_1, \ldots, a_n$ на главной диагонали будем обозначать через $[a_1, \ldots, a_n]$.

Квадратная матрица называется *скалярной*, если она диагональна и все элементы на главной диагонали одинаковы.

Скалярная матрица порядка n с элементами 1 на главной диагонали, как уже говорилось в т.1-5, называется *единичной матрицей порядка* n и обозначается через E_n.

Рассмотрим линейные операции над матрицами: сложение матриц и умножение матрицы на скаляр. Напомним, что для краткости скалярами называются элементы поля.

Сложение определено только для матриц одинаковых размеров. *Суммой* матриц A и B из $F^{m\times k}$ называется матрица $C \in F^{m\times k}$, обозначаемая через $A+B$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B: $C[i,j] = A[i,j] + B[i,j]$, $i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,k$.

Например, $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 20 \\ 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}$;

сумма $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ не определена.

Произведением матрицы $A_{m\times k}$ и скаляра t называется матрица таких же размеров, как матрица A, обозначаемая через $D = tA$, каждый элемент которой получается умножением соответствующего элемента матрицы A на скаляр t: $D[i,j] = tA[i,j],\ i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,k$.

Например, $4\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 4 & -8 & 40 \\ -4 & 0 & 36 \end{pmatrix}$.

Для сложения матриц и умножения матрицы на число выполняются следующие проверяемые очевидным образом свойства.

1. Для любых матриц A, B одинаковых размеров справедливо равенство $A+B=B+A$.

2. Для любых матриц A, B, C одинаковых размеров справедливо равенство $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. Существует матрица $O=O_{m\times k}$ размеров $m\times k$ такая, что для любой матрицы A таких же размеров справедливо равенство $A+O=A$.

4. Для любой матрицы $A_{m\times k}$ существует матрица B тех же размеров такая, что справедливо равенство $A+B=O_{m\times k}$.

5. Для любых матриц A, B одинаковых размеров и любого числа t справедливо равенство $t(A+B)=tA+tB$.

6. Для любой матрицы A и любых чисел s,t справедливо равенство $(s+t)A=sA+tA$.

7. Для любой матрицы A и любых чисел s,t справедливо равенство $s(tA)=(st)A=t(sA)$.

8. Для любой матрицы A справедливо равенство $1A=A$.

Свойства 1 и 2 следуют из соответствующих свойств сложения чисел. В свойстве 3 в качестве $O_{m\times k}$ следует взять матрицу размеров $m\times k$ с нулевыми элементами; такая матрица называется *нулевой*. В свойстве 4 в качестве B можно взять матрицу с элементами, противоположными элементам матрицы A; такая матрица называется *противоположной* матрице A. Свойства 5–8 обеспечиваются соответствующими свойствами поля (дистрибутивностью, ассоциативностью умножения).

Таким образом, $F^{m\times k}$ является абелевой группой относительно сложения матриц.

Заметим, что скалярная матрица порядка n с элементом a на главной диагонали может быть представлена как aE_n, где E_n– единичная матрица порядка n.

Пусть $A_1, \ldots, A_s$–матрицы размеров $m \times k$, $t_1, \ldots, t_s$–некоторые числа. Матрица $t_1 A_1 + \ldots + t_s A_s$ называется *линейной комбинацией* матриц $A_1, \ldots, A_s$ с коэффициентами $t_1, \ldots, t_s$. Если матрица B равна линейной комбинации матриц $A_1, \ldots, A_s$ с некоторыми коэффициентами, то говорят, что B *линейно выражается* через указанные матрицы.

Обозначим через $E_{m\times k}^{(i,j)}$ матрицу размеров $m \times k$, у которой все элементы равны нулю, за исключением элемента на пересечении i-й строки и j-го столбца, который равен единице. Такие матрицы называются *матричными единицами* размеров $m \times k$. Для матрицы $A = (a_{ij})_{m\times k}$ справедливо очевидное равенство (в котором используется краткое обозначение $\sum_{r=1}^{s} x_r$ для суммы $x_1 + \ldots + x_s$)

$$A_{m\times k} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} E_{m\times k}^{(i,j)}. \qquad (2)$$

Это равенство показывает, что любая матрица размеров $m \times k$ линейно выражается через матричные единицы размеров $m \times k$.

Определим теперь умножение матриц.
Говорят, что размеры матриц $A_{m\times k}$ и $B_{n\times \ell}$ *согласованы*, если $k = n$, т.е. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В этом определении существен порядок матриц A, B: размеры A и B могут быть согласованы, а размеры B и A – не согласованы.

Произведение матриц $A \cdot B$ определено только тогда, когда размеры матриц $A_{m\times k}$ и $B_{n\times \ell}$ согласованы, и по определению $A \cdot B = C_{m\times \ell}$, где $C[i,j] = A[i,1]B[1,j] + A[i,2]B[2,j] + \ldots + A[i,k]B[k,j]$ для всех $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,\ell$. Используя краткое обозначение для суммы, элемент c_{ij} можно записать в виде

$$C[i,j] = \sum_{r=1}^{k} A[i,r]B[r,j]. \tag{3}$$

Формула (3) дает выражение для произведения строки $(A[i,1], A[i,2], \ldots, A[i,k])$ на столбец $\begin{pmatrix} B[1,j] \\ B[2,j] \\ \ldots \\ B[k,j] \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 20 \\ 9 & 16 & 70 \\ 8 & 7 & 81 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ не определено;}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 14 \\ 63 & 54 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсутствие коммутативности

Мы видим, что умножение матриц *некоммутативно*, т.е. не для всех матриц справедливо равенство $A \cdot B = B \cdot A$. Кроме того, одно из этих произведений может быть определено, а другое – не определено.

На следующих двух слайдах приведены свойства умножения матриц.

1. Для любых матриц A, B, C, если определено одно из произведений $(A \cdot B) \cdot C$ или $A \cdot (B \cdot C)$, то определено и другое, и справедливо равенство $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

$\Downarrow$Если произведение $(A \cdot B) \cdot C$ определено, то легко понять, что матрицы будут иметь размеры $A_{m \times k}$, $B_{k \times \ell}$, $C_{\ell \times n}$, и произведение $A \cdot (B \cdot C)$ также определено. Обратное утверждение получается аналогично. При этом матрицы $(A \cdot B) \cdot C$ и $A \cdot (B \cdot C)$ имеют одинаковые размеры $m \times n$. Для доказательства поэлементного равенства матриц $(A \cdot B) \cdot C$ и $A \cdot (B \cdot C)$ необходимо воспользоваться следующим свойством суммирования: $\sum_{s=1}^{u} \sum_{t=1}^{v} x_{st} = \sum_{t=1}^{v} \sum_{s=1}^{u} x_{st}$. Имеем для любых $i = 1, \ldots m$ и $j = 1, \ldots n$

$$((A \cdot B) \cdot C)[i,j] = \sum_{r=1}^{\ell} (A \cdot B)[i,r]C[r,j] = \sum_{r=1}^{\ell} \left(\sum_{s=1}^{k} A[i,s]B[s,r] \right) C[r,j] =$$

$$\sum_{r=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{k} A[i,s]B[s,r]C[r,j] = \sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{\ell} A[i,s]B[s,r]C[r,j] =$$

$$\sum_{s=1}^{k} A[i,s] \left(\sum_{r=1}^{\ell} B[s,r]C[r,j] \right) = \sum_{s=1}^{k} A[i,s](B \cdot C)[s,j] =$$

$$(A \cdot (B \cdot C))[i,j].$$

Таким образом, требуемое равенство доказано.$\Uparrow$

Дальнейшие свойства умножения

2. Для любых матриц $A_{m\times k}$, $B_{k\times l}$, $C_{k\times l}$ справедливо равенство $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

3. Для любых матриц $A_{m\times k}$, $B_{m\times k}$, $C_{k\times l}$ справедливо равенство $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

4. Для любых матриц $A_{m\times k}$, $_{k\times l}$ и любого числа t справедливы равенства $(tA)\cdot B=t(A\cdot B)=A\cdot(tB)$.

5. Для любой матрицы $A_{m\times k}$ и единичных матриц E_k, E_m справедливы равенства $A\cdot E_k=E_m\cdot A=A$.

Эти свойства получаются из определения произведения матриц рассуждениями, аналогичными применявшимся при доказательстве свойства 1.

Мы видим, что совокупность $F^{n\times n}$ всех квадратных матриц порядка n над полем F является ассоциативным кольцом с единицей.

Получим матричную запись системы линейных уравнений в общем виде.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})_{k\times n}$, состоящую из коэффициентов при неизвестных в этой системе (напомним, что она называется основной матрицей этой системы), столбец $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ неизвестных и столбец $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_k \end{pmatrix}$ свободных членов. Тогда система (4) записывается в матричном виде так:

$$A \cdot x = b. \tag{5}$$

Матрица $(A \mid b)$, полученная приписыванием к основной матрице системы линейных уравнений столбца ее свободных членов, была названа в т.1-5 расширенной матрицей системы.

Рассмотрим квадратные матрицы порядка n. Их можно складывать и умножать, в частности возводить в степень с натуральным показателем. Пусть A – квадратная матрица порядка n и

$$f(x) = a_0x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_{r-1}x + a_r$$

есть многочлен степени r. Значение многочлена от матрицы определяется так:

$$f(A) = a_0A^r + a_1A^{r-1} + \ldots + a_{r-1}A + a_rE_n.$$

Вот пример. Пусть $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $f(A) = A^2 - 3A + 4E_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Можно рассматривать и матричные многочлены вида

$$F(x) = A_0x^r + A_1x^{r-1} + \ldots + A_{r-1}x + A_r,$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_r$ – фиксированные квадратные матрицы порядка n. Значение такого многочлена от квадратной матрицы B порядка n вычисляется по формуле

$$F(B) = A_0 \cdot B^r + A_1 \cdot B^{r-1} + \ldots + A_{r-1} \cdot B + A_r.$$

Рассмотрим пример. Пусть

$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда

$F(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$

Транспонированной к матрице A называется матрица, полученная из A заменой строк на столбцы. Она обозначается через $A^\top$. Если матрица A имеет размеры $m \times k$, то $A^\top$ имеет размеры $k \times m$ и

$$A^\top[i,j] = A[j,i] \ \ (i = 1,\dots,k; j = 1,\dots,m). \tag{6}$$

Рассмотрим примеры.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 20 \\ 9 & 16 & 70 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 16 \\ 20 & 70 \end{pmatrix}.$$

Из определения операций над матрицами легко вывести следующие свойства, показывающие, как транспонирование взаимодействует с этими операциями.

1. Для любых матриц A, B одинаковых размеров справедливо равенство $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.

2. Для любой матрицы A и любого комплексного числа t справедливо равенство $(tA)^\top = tA^\top$.

3. Для любых матриц A, B согласованных размеров справедливо равенство $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$.

4. Для любой матрицы A справедливо равенство $(A^\top)^\top = A$.

Матрица называется *симметрической*, если она совпадает со своей транспонированной. Легко понять, что симметрическая матрица является квадратной и ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, совпадают. Очевидно, что сумма двух симметрических матриц одного порядка и произведение симметрической матрицы на число являются симметрическими матрицами.

Квадратная матрица A порядка n называется *кососимметрической*, если $A[i,j] = -A[j,i]$ для всех $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Матричным уравнением мы будем называть уравнение одного из видов

$$A \cdot X = B \text{ или } X \cdot C = D, \tag{7}$$

где A, B, C, D – известные матрицы; X – неизвестная матрица. Разумеется, матрицы A и X в первом уравнении, X и C во втором должны быть согласованных размеров, а число строк в матрицах A и B, равно как и число столбцов в матрицах C и D, должно быть одинаковым. С помощью транспонирования обеих частей уравнения $X \cdot C = D$, получаем, что указанное уравнение равносильно следующему уравнению: $C^\top \cdot X^\top = D^\top$. Таким образом, достаточно научиться решать матричные уравнения вида $A \cdot X = B$.

Такие уравнения сводятся к нескольким системам линейных уравнений (число систем равно числу столбцов матрицы B) с одинаковой основной матрицей. Это легко усмотреть из матричной записи системы линейных уравнений. Удобно решать все системы одновременно с помощью метода Гаусса–Жордана. Если по крайней мере одна система оказывается несовместной, то матричное уравнение не имеет решения. Если все системы совместны и по крайней мере одна из них неопределенная, то матричное уравнение имеет более одного решения (бесконечное множество в случае бесконечного поля). Если все системы определенные, то матричное уравнение имеет единственное решение.

1. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$ над полем $\mathbb{R}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Неизвестная матрица X имеет размеры 3×2, т.е. может быть записана с неопределенными элементами в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

Для отыскания неизвестных элементов имеем две системы линейных уравнений (для каждого из столбцов матрицы X) с одинаковой основной матрицей (A) и разными столбцами свободных членов (они образуют матрицу B). Для решения преобразуем расширенную матрицу, полученную приписыванием к матрице A матрицы B:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Запишем по последней матрице две системы линейных уравнений:
$\begin{cases} x_{11} - x_{21} = -1; \\ x_{21} + x_{31} = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_{12} - x_{22} = -2; \\ x_{22} + x_{32} = 1. \end{cases}$ Из них находим выражения элементов x_{11}, x_{31} матрицы X через x_{21}, а элементы x_{12}, x_{32} выражаем через x_{22}: $x_{11} = x_{21} - 1$, $x_{31} = -x_{21} + 1$, $x_{12} = x_{22} - 2$, $x_{32} = -x_{22} + 1$.
Значения элементов x_{21}, x_{22} можно выбирать произвольно. Таким образом, рассматриваемое матричное уравнение имеет бесконечное множество решений: $X = \begin{pmatrix} x_{21} - 1 & x_{22} - 2 \\ x_{21} & x_{22} \\ -x_{21} + 1 & -x_{22} + 1 \end{pmatrix}$ при всех $x_{21}, x_{22} \in \mathbb{R}$.

Пример уравнения, не имеющего решений

2. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Неизвестная матрица X имеет размеры 2×2. Преобразуем матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Мы видим, что системы для каждого из столбцов матрицы X несовместны, т.е. матричное уравнение не имеет решения.

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Неизвестная матрица X имеет размеры 2×2. Преобразуем матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Мы видим, что матричное уравнение имеет единственное решение $X = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Условие единственности решения

Легко проверить, что если при решении матричного уравнения $A \cdot X = B$ с квадратной матрицей A порядка n матрица $(A \mid B)$ элементарными преобразованиями строк приводится к виду $(E_n \mid C)$ с единичной матрицей слева, то матричное уравнение имеет единственное решение $X = C$.

Определение

Матрица A называется *обратимой*, если существует такая матрица B, и такое натуральное число n, что

$$A \cdot B = E_n, \quad B \cdot A = E_n. \tag{8}$$

Из определения произведения матриц легко следует, что если матрица A является обратимой, то она и матрица B должны быть квадратными матрицами порядка n. Таким образом, обратимая матрица является обратимым элементом кольца $F^{n \times n}$ (т.е. элементом, имеющим обратный элемент относительно умножения, см. сл.7,4 т.1-4).

Лемма

Для обратимой матрицы A существует единственная матрица B со свойствами (8).

$\Downarrow$Допустим, что матрицы B_1 и B_2 таковы, что $A \cdot B_1 = E_n, \;\; B_1 \cdot A = E_n$ и $A \cdot B_2 = E_n, \;\; B_2 \cdot A = E_n$. Тогда, используя свойства 5 и 1 умножения матриц, а также последние равенства, имеем $B_1 = B_1 \cdot E_n = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = E_n \cdot B_2 = B_2$, т.е. $B_1 = B_2$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Для обратимой матрицы A единственная матрица B, удовлетворяющая равенствам (8), называется *обратной* и обозначается через A^{-1}. Таким образом,

$$A \cdot A^{-1} = E_n, \;\; A^{-1} \cdot A = E_n. \tag{9}$$

Заметим, что утверждение леммы получается из предложения сл.5 т.1-4 о единственности симметричного элемента, а обратная матрица является обратным элементом к исходной матрице в кольце квадратных матриц порядка n над полем F.

1. Если матрица A обратима и t–ненулевое число, то матрица tA обратима и $(tA)^{-1} = \frac{1}{t}A^{-1}$.

2. Если матрицы A и B обратимые одного и того же порядка, то матрица $A \cdot B$ обратима и $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Эти свойства непосредственно выводятся из определения обратимой матрицы и свойств умножения матриц.

3. Если матрица A порядка n обратима, а B, C – произвольные матрицы размеров $n \times k$, то из $A \cdot B = A \cdot C$ следует $B = C$.

$\Downarrow$Для доказательства умножим равенство $A \cdot B = A \cdot C$ слева на A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot (A \cdot C)$, откуда $(A^{-1} \cdot A) \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot C$ и $E_n \cdot B = E_n C$. Таким образом, $B = C$, что и требуется.$\Uparrow$

Аналогично доказывается следующее свойство.

4. Если матрица A порядка n обратима, а B, C – произвольные матрицы размеров $m \times n$, то из $B \cdot A = C \cdot A$ следует $B = C$.

5. Матрица A порядка n обратима тогда и только тогда, когда обратима транспонированная к ней матрица $A^{\top}$, и при этом $(A^{-1})^{\top} = (A^{\top})^{-1}$.

Это свойство легко выводится из свойств операции транспонирования.

Не всякая квадратная матрица является обратимой. Очевидный пример – нулевая матрица порядка n при любом натуральном n. Если матрица A является обратимой, то матричное уравнение $A \cdot X = E_n$ имеет решение (ниже будет установлено, что единственное), которое является матрицей A^{-1}. Поэтому матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ не является обратимой, так как матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не имеет решений:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

Таким образом, для нахождения обратной матрицы можно решить матричное уравнение $A \cdot X = E_n$. Получается первый способ нахождения обратной матрицы.

> *Чтобы выяснить, является ли квадратная матрица A обратимой и в случае положительного ответа найти обратную к ней матрицу, следует приписать справа к матрице A единичную матрицу такого же порядка и, используя элементарные преобразования строк полученной матрицы, попытаться привести матрицу, стоящую на месте матрицы A, к единичной. Если это удается, то матрица A является обратимой, и на месте единичной матрицы получается обратная к A матрица. В противном случае матрица A не является обратимой.*

Применим этот алгоритм для нахождения обратной матрицы к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/3 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & 1 & 2/3 \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 & 4/3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Применение алгоритма

Если применить указанный алгоритм к любой матрице, то после приведения левой матрицы к ступенчатому виду может возникнуть одна из двух ситуаций:

- на главной диагонали левой подматрицы все элементы ненулевые (и тогда исходная матрица является обратимой, можно найти обратную матрицу);
- одна или несколько последних строк левой подматрицы нулевые (и тогда исходная матрица не является обратимой, преобразования следует прекратить).

Предложение

Если квадратная матрица A порядка n обратима и матрица B имеет n строк [столбцов], то матричное уравнение $A \cdot X = B$ [$X \cdot A = B$] имеет единственное решение $X = A^{-1} \cdot B$ [$X = B \cdot A^{-1}$].

$\Downarrow$Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Имеем $A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = E_n \cdot B = B$, т.е. матрица $A^{-1} \cdot B$ есть решение уравнения $A \cdot X = B$. Пусть C – произвольное решение этого уравнения. Тогда $A \cdot C = B$. Умножая обе части этого равенства слева на A^{-1}, получаем $A^{-1} \cdot (A \cdot C) = A^{-1} \cdot B$, откуда $(A^{-1} \cdot A) \cdot C = A^{-1} \cdot B$ и $C = A^{-1} \cdot B$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

С помощью обратных матриц можно решать системы линейных уравнений, основная матрица которых обратимая. В самом деле, пусть $A \cdot X = B$ — такая система. Применяя предложение сл.34, получаем, что наша система имеет единственное решение, которое выражается формулой $X = A^{-1} \cdot B$.

Решим указанным способом систему линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2, \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 7. \end{array}\right. \qquad (10)$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ а } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Окончание примера

Матрица A^{-1} была вычислена выше. Используя формулу $X = A^{-1} \cdot B$, имеем

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 & 4/3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система (10) имеет единственное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.