Тема 1-5: Системы линейных уравнений

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть F – поле. *Система k линейных алгебраических уравнений с n неизвестными* над полем F может быть записана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{1}$$

Определения

Здесь $a_{ij} \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ называются *коэффициентами* системы (1), $b_i \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — ее *свободными членами*. Они предполагаются известными.

Частным решением системы линейных уравнений (1) называется упорядоченный набор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ элементов из F, такой, что при подстановке в каждое ее уравнение вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов $c_1, c_2, \ldots, c_n$ соответственно это уравнение превращается в верное равенство.

Решить систему (1) означает указать определенным способом все ее частные решения или доказать, что их не существует.

Множество всех частных решений данной системы линейных уравнений называется ее *общим решением*.

Пример частного решения

Например, для системы линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4; \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

строка $(-1, 0, 0, 2)$ является частным решением, а строка $(1, -1, -1, 2)$ – не является.

Типы систем линейных уравнений

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно частное решение (т.е. ее общее решение не пусто); в противном случае говорят, что система *несовместна*.

Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*, а система, имеющая более одного решения, – *неопределенной*. Далее будет установлено, что неопределенная система над бесконечным полем всегда имеет бесконечно много решений.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены во всех уравнениях равны 0. Однородная система линейных уравнений всегда совместна, так как имеет нулевое решение $(0, 0, \ldots, 0)$.

Две системы линейных уравнений называются *равносильными*, если они имеют совпадающие общие решения. Это означает, что каждое частное решение первой системы является решением второй и, обратно, каждое частное решение второй системы будет решением первой. Любые две несовместные системы по определению равносильны.

Элементы поля для краткости будем называть *скалярами*.
Следующие преобразования системы линейных уравнений называются *элементарными*:

1) умножение уравнения на ненулевой скаляр;
2) прибавление одного уравнения, умноженного на скаляр, к другому;
3) перестановка двух уравнений;
4) перестановка двух столбцов с неизвестными;
5) вычеркивание уравнений вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$.

Уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$ будем называть *нулевым*.

Следующая лемма играет ключевую роль в обосновании метода Гаусса.

Лемма

Элементарные преобразования системы линейных уравнений сохраняют множество ее решений, т.е. приводят к равносильной системе.

$\Downarrow$ Тот факт, что множество решений системы сохраняется преобразованиями 3–5, очевиден. Очевидно также, что если верное равенство умножить на любой скаляр, то оно останется верным. Поэтому решение данной системы является и решением системы, полученной из нее умножением одного из уравнений на ненулевой скаляр t. Поскольку исходная система получается из новой преобразованием такого же типа (умножением того же уравнения на скаляр $1/t$), всякое решение новой системы является и решением исходной системы. Таким образом, преобразование 1 также не меняет множества решений системы. Окончание доказательства на следующем слайде.

Пусть теперь новая система получена из старой прибавлением j-того уравнения, умноженного на скаляр t, к i-тому. Поскольку если верное равенство умножить на любой скаляр t, то оно останется верным и сумма двух верных равенств – снова верное равенство, всякое решение старой системы является и решением новой. Далее, старую систему можно получить из новой последовательным выполнением трех преобразований – сначала умножаем j-тое уравнение новой системы (совпадающее с j-тым уравнением старой системы!) на $-t$, затем прибавляем полученное уравнение к i-тому уравнению новой системы. В силу сказанного выше, всякое решение новой системы является и решением старой. Таким образом, и преобразование 2 не меняет множества решений системы. Лемма доказана.$\Uparrow$

Система линейных уравнений вида

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & +\dots+ & c_{1r}x_r & +\dots+ & c_{1n}x_n & = & d_1, \\ & & c_{22}x_2 & +\dots+ & c_{2r}x_r & +\dots+ & c_{2n}x_n & = & d_2, \\ & & & \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ & & & & c_{rr}x_r & +\dots+ & c_{rn}x_n & = & d_r, \end{array}\right. \qquad (2)$$

где $c_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$, $\dots$, $c_{rr} \neq 0$, называется *лестничной*. В частности, лестничная система может состоять из одного уравнения.

Мы будем использовать этот термин также для обозначения систем вида (2), в уравнениях которых первое слагаемое содержит не обязательно неизвестное x_1, второе — не обязательно x_2 и т.д.

Например, система

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_2 & = & 1, \\ & & 2x_3 & + & x_4 & - & x_2 & = & 0, \\ & & & & x_4 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

является лестничной.

Метод Гаусса состоит в применении к системе элементарных преобразований с целью получения лестничной системы. Рассмотрим систему (1) сл.2. Будем считать, что каждое неизвестное встречается по крайней мере в одном уравнении с ненулевых коэффициентом. Тогда, при необходимости переставив уравнения, будем предполагать, что $a_{11} \neq 0$. Если $k = 1$, то система является лестничной. Пусть $k > 1$. Исключим из уравнений $2, \ldots, k$ неизвестное x_1. Для этого при $i = 2, \ldots, k$ прибавим к i-му уравнению 1-е, умноженное на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$. Получим систему

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a'_{k2}x_2 + \ldots + a'_{kn}x_n = b'_k. \end{array}\right. \tag{3}$$

В силу леммы сл.6 система (3) равносильна системе (1). Вычеркнем из нее все нулевые уравнения. Если полученная система содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = d$, где $d \neq 0$, то она несовместна, и вместе с ней несовместна система (1). Если после вычеркивания в системе остается более одного уравнения, то рассматриваем систему, полученную из последней системы отбрасыванием первого уравнения. В этой системе по крайней мере одно неизвестное встречается с ненулевым коэффициентом. Запишем ее, переставив уравнения и столбцы с неизвестными так, чтобы первый коэффициент был отличен от нуля.

Здесь $\ell \leq k$, $\alpha_{22} \neq 0$ и если столбцы с неизвестными переставлялись, то неизвестные перенумерованы так, что они идут по порядку.

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \alpha_{\ell 2}x_2 + \ldots + \alpha_{\ell n}x_n = \beta_\ell. \end{array}\right. \tag{4}$$

Если $\ell = 2$, т.е. система (4) состоит из одного уравнения, то приведение к лестничной системе закончено. При $\ell > 2$ применим к системе (4) те же рассуждения, что и к системе (1) на сл.9, а именно исключим из $3, \ldots, \ell$ уравнений неизвестное x_2, вычеркнем нулевые уравнения, проверим, совместна ли система. Продолжая этот процесс, мы либо установим несовместность системы (1), либо приведем ее к лестничной системе.

Рассмотрим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & & & = & 6, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 3. \end{array}\right. \tag{5}$$

Поскольку в лестничной системе в первом уравнении коэффициент при первом из неизвестных должен быть отличен от нуля, а в первом уравнении нашей системы коэффициент при x_1 равен нулю, выберем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля, — например, второе, — и поменяем его местами с первым уравнением. Получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & & & = & 6, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 3. \end{array}\right.$$

Продолжение примера 1

В лестничной системе во всех уравнениях, кроме первого, первое из неизвестных должно входить с коэффициентом 0. Чтобы добиться этого, прибавим к третьему уравнению системы первое, умноженное на -1, а к четвертому — первое, умноженное на -2. Получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & - & 3x_5 & = & -5. \end{array}\right.$$

Дальнейшие преобразования применяются к системе, состоящей из трех последних уравнений (за исключением возможной перестановки столбцов с неизвестными). Поскольку в лестничной системе во всех уравнениях, кроме первых двух, второе из неизвестных должно входить с коэффициентом 0, прибавим к третьему уравнению последней системы второе уравнение, умноженное на -1, а затем умножим четвертое уравнение на 2 и к результату прибавим второе уравнение. Получается система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 0, \\ 5x_3 - 6x_4 - 7x_5 = -8. \end{cases}$$

Вычеркивая из полученной системы третье уравнение, получаем лестничную систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 5x_3 - 6x_4 - 7x_5 = -8, \end{cases} \qquad (6)$$

которая в силу леммы эквивалентна исходной системе. Легко понять, что система (6) совместна. Например, ее решением является набор чисел $(1, -1, 2, 3, 0)$.

Пример 2

Рассмотрим следующую систему:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 3, \\ & & & & 6x_3 & + & x_4 & = & 7, \\ & & & - & 3x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}\right. \tag{7}$$

Прибавляя ко второму уравнению этой системы первое, умноженное на -2, получаем систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ & & & & 3x_3 & - & 4x_4 & = & -1, \\ & & & & 6x_3 & + & x_4 & = & 7, \\ & & & - & 3x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}\right.$$

Столбец с неизвестным x_2 поставим на последнее место (это равносильно последовательному выполнению двух элементарных преобразований: сначала поменяем местами столбцы с неизвестными x_2 и x_4, а затем – столбцы с неизвестными x_4 и x_3). Получим:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 + x_2 = 2, \\ 3x_3 - 4x_4 = -1, \\ 6x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$$

Прибавив к третьему уравнению второе, умноженное на -2, а к четвертому – второе (ни на что не умноженное), получаем:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 + x_2 = 2, \\ 3x_3 - 4x_4 = -1, \\ 9x_4 = 9, \\ -5x_4 = -4. \end{cases}$$

Если теперь к четвертому уравнению прибавить третье, умноженное на $5/9$, то мы получим уравнение $0 \cdot x_4 = 1$. Следовательно, система (7) несовместна.

Из рассуждений сл.9 и 10, принимая во внимание, что любая лестничная система совместна, получаем следующее утверждение.

Теорема

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ее можно с помощью элементарных преобразований привести к лестничной системе.

Остается вопрос о том, как искать решение лестничной системы. Она решается "снизу вверх"(см. систему (2) сл.8): из последнего уравнения выражаем x_r, подставляем его выражение в предпоследнее, из него выражаем x_{r-1}, и так далее. Рассмотрим это на примере лестничной системы (6), которая возникла ранее:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ \phantom{x_1 +{}} 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ \phantom{x_1 + 2x_2 -{}} 5x_3 - 6x_4 - 7x_5 = -8. \end{cases}$$

Легко понять, что если зафиксировать (*произвольным образом*) значения неизвестных x_4 и x_5, то можно подобрать (причем единственным образом) значения неизвестных x_1, x_2 и x_3 так, что набор $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ будет решением системы (6). В самом деле, полагая, например, $x_4 = 0$ и $x_5 = -1$, последовательно находим:
из третьего уравнения системы (6) – что $x_3 = -3$; из ее второго уравнения — что $x_2 = -1$; из первого уравнения — что $x_1 = 3$.
Таким образом, $(3, -1, -3, 0, -1)$ – решение системы (6). Полагая $x_4 = 3$, $x_5 = -5$, после очевидных вычислений получаем, что $x_1 = 5$, $x_2 = -7$ и $x_3 = -5$, откуда $(5, -7, -5, 3, -5)$ – еще одно ее решение. Ясно, что любое решение системы (6) может быть получено таким образом (ведь оно “включает в себя” какие-то значения для x_4 и x_5 и удовлетворяет всем равенствам этой системы).

Нахождения и запись общего решения

Из сказанного ранее вытекает способ нахождения и записи общего решения системы линейных уравнений. Поясним его на примере системы (5). В силу леммы, общее решение этой системы совпадает с общим решением системы (6). Поскольку, как мы видели выше, решая последнюю систему, значения неизвестных x_4 и x_5 можно задавать произвольным образом, а значения остальных неизвестных однозначно вычисляются исходя из выбора значений x_4 и x_5, естественно назвать неизвестные x_4 и x_5 *свободными*, а неизвестные x_1, x_2 и x_3 – *связанными* или *основными*. Перенося в системе (6) свободные неизвестные в правую часть, получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 & - & 2x_4 & - & x_5, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 & - & 2x_4 & + & x_5, \\ & & & & 5x_3 & = & -8 & + & 6x_4 & + & 7x_5. \end{array}\right. \qquad (8)$$

Свободным неизвестным придадим значения $x_4 = c_1$ и $x_5 = c_2$, а основные неизвестные выразим через c_1 и c_2 с помощью равенств системы (8). После очевидных преобразований получим, что

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5}c_1 - \frac{4}{5}c_2 + \frac{11}{5}, \\ x_2 = -\frac{2}{5}c_1 + \frac{6}{5}c_2 + \frac{1}{5}, \\ x_3 = \frac{6}{5}c_1 + \frac{7}{5}c_2 - \frac{8}{5}, \\ x_4 = c_1, \\ x_5 = c_2. \end{cases} \tag{9}$$

Итак, множество всех решений системы (6) (равно как и системы (5) есть в точности множество всех наборов $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, удовлетворяющих равенствам (9). Поэтому эти равенства мы также будем называть общим решением (5). Равенства такого типа называют также *координатной записью* общего решения системы.

Число решений лестничной системы

Поскольку свободным переменным можно придавать произвольные значения, ясно, что если при решении системы возникает хотя бы одна свободная переменная, и поле F бесконечно, то система имеет бесконечно много решений. С другой стороны, из приведенного выше рассмотрения системы (5) ясно, что свободные переменные появляются тогда, когда после приведения системы к лестничному виду получается система, содержащая меньше уравнений, чем неизвестных. Если же в лестничной системе число уравнений равно числу неизвестных, то она (а значит, и любая система, которая приводится к ней элементарными преобразованиями) имеет единственное решение.

Пример единственного решения

Продемонстрируем это на примере следующей системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases} \qquad (10)$$

После приведения ее элементарными преобразованиями к лестничной системе, получим следующую систему (выкладки мы пропускаем):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -x_2 + 5x_3 = -1, \\ -x_3 = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Из третьего уравнения системы (11) имеем $x_3 = 0$, из второго – $x_2 = 1$, и из первого — $x_1 = 1$. Таким образом, единственным решением системы (11) (а значит, и системы (10)) является набор (1,1,0).

Сформулируем сделанные наблюдения в виде теоремы.

Теорема

Если в лестничной системе линейных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, и поле F бесконечно, то система имеет бесконечно много решений. Если в лестничной системе число уравнений равно числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Ненулевое решение однородной системы

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Теорема

Если число уравнений однородной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет по крайней мере одно ненулевое решение.

Чтобы облегчить получение общего решения, процесс исключения неизвестных можно проводить более полно. Поясним, что мы имеем в виду, на примере системы (5). Ранее мы прервали процесс преобразований этой системы, получив из нее систему (6). Продолжим теперь этот процесс. Исключим из первого и второго уравнений последней системы неизвестное x_3. Для этого каждое из указанных уравнений умножим на 5 и к результату прибавим третье уравнение. Получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 5x_1 & + & 5x_2 & & & + & 4x_4 & - & 2x_5 & = & 12, \\ & & 10x_2 & & & + & 4x_4 & - & 12x_5 & = & 2, \\ & & & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8. \end{array}\right.$$

Теперь исключим x_2 из первого уравнения, для чего к первому уравнению, умноженному на 2, прибавим второе, умноженное на -1. Получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 10x_1 & & & & & + & 4x_4 & + & 8x_5 & = & 22, \\ & & 10x_2 & & & + & 4x_4 & - & 12x_5 & = & 2, \\ & & & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8, \end{array}\right. \qquad (12)$$

которая по прежнему будет равносильна исходной. Переход от полученной теперь системы к общему решению тривиален: полагая $x_4 = c_1$ и $x_5 = c_2$, автоматически получаем систему (9).

Метод Гаусса, дополненный исключением неизвестных в “верхних” уравнениях, называется *методом Гаусса–Жордана* или *методом последовательного полного исключения неизвестных*.

Определение

Матрицей над множеством M называется прямоугольная таблица, составленная из элементов этого множества. Элементы M, из которых состоит матрица, называются ее *элементами*.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса–Жордана удобно проводить с помощью матриц над полем F, чему будут посвящены слайды 36-51 ниже.

Определение

Следующие преобразования матрицы называются *элементарными*:

1) умножение строки на ненулевой скаляр;
2) прибавление одной строки, умноженной на скаляр, к другой;
3) перестановка двух строк;
4) перестановка двух столбцов;
5) вычеркивание нулевой строки.

Преобразования 1, 2, 3 называются *элементарными преобразованиями строк матрицы*. Отметим, что преобразование 3 можно осуществить последовательным выполнением нескольких преобразований 1 и 2.

Отметим очевидную аналогию элементарных преобразований матриц над полем F с элементарными преобразованиями систем линейных уравнений. Далее термин "матрица" будет обозначать матрицу над некоторым полем, если не оговорено противное.

Важную роль в дальнейшем будет играть следующее понятие.

Определение

Матрица называется *ступенчатой (по строкам)*, если либо все ее элементы равны нулю (матрицы, обладающие последним свойством, называются *нулевыми*), либо выполнены следующие условия:

1) если некоторая строка матрицы, отличная от первой, не является нулевой, то в начале этой строки стоит больше нулей, чем в начале предыдущей строки;
2) если некоторая строка матрицы является нулевой, то и все ее последующие строки — нулевые.

Приведем несколько примеров ступенчатых матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0),$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общий вид ступенчатой матрицы

Общий вид ступенчатой матрицы изображен ниже.

$$\begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & * & & & & & \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & * & & & \\
& & & & & & \ddots & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & * & \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & * \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0
\end{pmatrix}.$$

Звездочками обозначены элементы, которые не должны быть равны 0. Напротив, все элементы, стоящие ниже ломаной линии, обязаны быть равны 0. Нулевых столбцов в левой части матрицы, как и нулевых строк в ее нижней части, может не быть.

Теорема

Произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

$\Downarrow$. Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица порядка $m \times n$. Можно считать, что она содержит по крайней мере один ненулевой элемент, так как в противном случае A уже имеет ступенчатый вид. Выберем в A самый левый столбец, содержащий по крайней мере один ненулевой элемент. Пусть этот столбец имеет номер j. Далее, выберем самую верхнюю строку, на пересечении которой с j-тым столбцом стоит ненулевой элемент. Пусть эта строка имеет номер i. Если $i > 1$, поменяем местами первую и i-тую строки. Обозначим полученную матрицу через B. В первой строке и j-том столбце матрицы B стоит ненулевой элемент. Обозначим его через x. Предположим, что в j-том столбце матрицы B есть ненулевой элемент y, расположенный ниже первой строки. Пусть он стоит в k-той строке. Прибавим к k-той строке, умноженной на x, первую строку, умноженную на $-y$. В результате на пересечении k-той строки и j-того столбца будет стоять элемент $xy - yx = 0$. Таким образом можно добиться того, что в j-том столбце все элементы, расположенные ниже первой строки, будут равны 0.

Продолжение доказательства теоремы

Полученную матрицу обозначим через C, а ее часть, расположенную ниже первой строки и правее j-того столбца – через C':

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \ldots & 0 & \multicolumn{1}{c}{x} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cline{5-5} 0 & \ldots & 0 & 0 & \\ \multicolumn{4}{c|}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & C' \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \end{array}\right).$$

Если C' — нулевая матрица, то матрица C является ступенчатой. Предположим поэтому, что в C' есть ненулевой элемент. Проделаем теперь с C' те же действия, которые ранее мы делали с матрицей A. А именно, выберем в матрице C самый левый столбец, в котором имеется хотя бы один ненулевой элемент, стоящий ниже первой строки (ясно, что этот элемент расположен внутри C'). Пусть этот столбец имеет номер r. Далее, выберем в C самую верхнюю строку, отличную от первой, на пересечении которой с r-тым столбцом стоит ненулевой элемент (опять-таки ясно, что этот элемент расположен внутри C'). Пусть эта строка имеет номер s. Если $s > 2$, поменяем местами вторую и s-тую строки матрицы C. Теперь на пересечении ее второй стороки и r-того столбца стоит ненулевой элемент. Обозначим его через z. Обнулим все элементы r-того столбца полученной матрицы, расположенные ниже ее второй строки (так же, как мы ранее обнулили все элементы j-того столбца матрицы B, расположенные ниже ее первой строки).

Окончание доказательства теоремы сл.30

Полученную матрицу обозначим через D, а ее часть, расположенную ниже второй строки и правее r-того столбца – через D':

$$D=\left(\begin{array}{ccccccc|c}
0 & \ldots & 0 & x & \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & z & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cline{8-8}
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \\
\multicolumn{7}{c|}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & D' \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 &
\end{array}\right).$$

Если D' — нулевая матрица, то матрица D является ступенчатой. Предположим поэтому, что в D' есть ненулевой элемент. Проделаем теперь с D' те же дейтвия, которые ранее мы делали с A и C' (выберем в матрице D самый левый столбец, в котором имеется хотя бы один ненулевой элемент, стоящий ниже второй строки; выберем в D самую верхнюю строку, отличную от первой и второй, на пересечении которой с выбранным столбцом стоит ненулевой элемент; при необходимости поменяем местами третью и выбранную строки матрицы D; обнулим все элементы, стоящие в полученной матрице в выбранном нами столбце ниже третьей строки). Продолжая этот процесс, мы через какое-то конечное число шагов получим ступенчатую матрицу. Отметим, что этот процесс обязательно оборвется через конечное число шагов, так как мы на каждом шаге сдвигаемся на одну строку вниз и по крайней мере на один столбец вправо, а число строк и столбцов в матрице A конечно.

Заметим, что когда в доказательстве теоремы мы приводили матрицу к ступенчатому виду, мы делали почти то же самое, что на слайдах 9-10 при приведении системы линейных уравнений к лестничному виду.
Единственное отличие состоит в том, что в доказательстве теоремы мы ни разу не воспользовались четвертым преобразованием (перестановкой столбцов).
В дальнейшем нам придется приводить матрицу к ступенчатому виду не только при решении систем линейных уравнений, но и в других задачах. В некоторых из этих задач перестановка столбцов не обязательна и в некотором смысле даже нежелательна.

Проиллюстрируем алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду, изложенный в доказательстве теоремы, на следующем примере. Пусть требуется привести к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Если матрица B может быть получена из матрицы A с помощью конечного числа элементарных преобразований, то мы будем писать $A \sim B$. Действуя по изложенному выше алгоритму, имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На первом шаге мы переставили первую и вторую строки. На втором — из третьей строки, умноженной на 2, вычли первую строку, а из четвертой строки, умноженной на 2, вычли первую строку, умноженную на 3. На третьем шаге мы переставили вторую и третью строки, а на четвертом — прибавили к четвертой строке вторую.

Определение

Пусть дана система линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + \dots + & a_{kn}x_n & = & b_k. \end{array}\right. \tag{13}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей* (или просто *матрицей*) *системы* (13), а матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}$$

– *расширенной матрицей* этой системы.

Совокупность всех столбцов расширенной матрицы, кроме ее последнего столбца, нам будет удобно иногда называть *основной частью* расширенной матрицы. В расширенной матрице системы часто отделяют ее последний столбец от остальных вертикальной чертой, т.е. записывают ее в виде

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{array}\right).$$

Это делается для того, чтобы подчеркнуть «особый характер» элементов последнего столбца – в нем, в отличие от всех остальных, стоят не коэффициенты при неизвестных, а свободные члены уравнений.

Итак, каждой системе линейных уравнений можно поставить в соответствие ее расширенную матрицу. Обратно, всякой матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1\ n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2\ n+1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & a_{k\ n+1} \end{pmatrix},$$

содержащей более одного столбца, можно поставить в соответствие систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1\ n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2\ n+1}, \\ \dotfill \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = a_{k\ n+1}. \end{cases}$$

Будем говорить, что эта система *соответствует* матрице A.

Легко заметить, что в проводившихся в лекции 1 преобразованиях систем линейных уравнений менялись лишь коэффициенты при неизвестных, а сами неизвестные просто переписывались. Иными словами, фактически мы преобразовывали расширенную матрицу системы. Обычно для экономии места и времени решение системы методом Гаусса сразу оформляют в виде преобразований расширенной матрицы системы. Заметим, что при этом пятым преобразованием (вычеркивание нулевой строки) пользуются не всегда, так как в ряде случаев бывает удобно не вычеркивать нулевые строки, а «накапливать» их внизу. Кроме того, при использовании четвертого преобразования (перестановка столбцов), следует помнить о том, что нельзя переставлять местами столбец с коэффициентами при неизвестных и столбец свободных членов. Иначе говоря, среди переставляемых столбцов не должно быть последнего столбца матрицы.

Очевидно, что расширенная матрица всякой лестничной системы линейных уравнений является ступенчатой. Обратное неверно. Так, например, система линейных уравнений, соответствующая ступенчатой матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

не является лестничной. Чтобы получить матрицу, соответствующую лестничной системе, надо переставить в A второй и четвертый столбцы. А вот ступенчатая матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

не может быть приведена элементарными преобразованиями к матрице, соответствующей лестничной системе. В самом деле, система линейных уравнений, соответствующая матрице B, несовместна, так как содержит уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 9$.

Легко понять, что справедливо следующее

Замечание

Если A — ступенчатая матрица, содержащая более одного столбца, то либо соответствующая ей система линейных уравнений является лестничной, либо эта система приводится к лестничной с помощью только перестановок столбцов с неизвестными, либо A содержит строку, в которой все элементы, кроме последнего, равны нулю, а последний элемент отличен от нуля.

Сформулируем теперь следующий алгоритм решения систем линейных уравнений («матричную версию» метода Гаусса).

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

Запишем ее расширенную матрицу и начнем приводить ее к ступенчатому виду. Если на каком-то шаге в матрице возникнет строка, в которой все элементы, кроме последнего, равны 0, а последний элемент отличен от нуля, то $($независимо от того, является ли полученная к этому моменту матрица ступенчатой$)$ преобразования прекращаются и констатируется, что система не имеет решений. Предположим теперь, что указанная ситуация не возникнет и мы приведем нашу матрицу к ступенчатому виду. Выпишем систему линейных уравнений, соответствующую полученной матрице. Если эта система не является лестничной, то, переставив столбцы с неизвестными, приведем ее к лестничному виду. Остается решить эту лестничную систему так, как это описано выше (сл.17).

Приведем пример. Запишем расширенную матрицу системы

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 3. \end{cases}$$

и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система линейных уравнений, соответствующая последней матрице, является лестничной. Общее решение этой системы найдено на сл.19. Напомним, что оно имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5}c_1 - \frac{4}{5}c_2 + \frac{11}{5}, \\ x_2 = -\frac{2}{5}c_1 + \frac{6}{5}c_2 + \frac{1}{5}, \\ x_3 = \frac{6}{5}c_1 + \frac{7}{5}c_2 - \frac{8}{5}, \\ x_4 = c_1, \\ x_5 = c_2. \end{cases}$$

Несложно переформулировать на языке матриц и метод Гаусса–Жордана. Мы не будем делать этого в общем виде, а ограничимся примерами. Продолжим элементарные преобразования расширенной матрицы системы сл.43, начиная с полученной там ступенчатой матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 5 & 0 & 4 & -2 & 12 \\ 0 & 10 & 0 & 4 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 10 & 0 & 0 & 4 & 8 & 22 \\ 0 & 10 & 0 & 4 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \end{array}\right).$$

Запись ответа

Из последней матрицы, соответствующей системе

$$\begin{cases} 10x_1 & & & + & 4x_4 & + & 8x_5 & = & 22, \\ & 10x_2 & & + & 4x_4 & - & 12x_5 & = & 2, \\ & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8, \end{cases}$$

с очевидностью вытекают равенства .

$$\begin{cases} x_1 & = & -\frac{2}{5}c_1 & - & \frac{4}{5}c_2 & + & \frac{11}{5}, \\ x_2 & = & -\frac{2}{5}c_1 & + & \frac{6}{5}c_2 & + & \frac{1}{5}, \\ x_3 & = & \frac{6}{5}c_1 & + & \frac{7}{5}c_2 & - & \frac{8}{5}, \\ x_4 & = & c_1 & & & & , \\ x_5 & = & & & c_2 & & . \end{cases}$$

Особенно полезной «матричная версия» метода Гаусса–Жордана оказывается для систем, которые имеют единственное решение. Продемонстрируем это сначала на примере системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \end{cases} \tag{14}$$

а затем сделаем общие выводы. Запишем расширенную матрицу системы (14) и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right).$$

Продолжим элементарные преобразования этой матрицы в соответствие с методом Гаусса–Жордана:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 13 & 13 & 0 & 26 \\ 0 & -13 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 13 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & -13 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right).$$

Случай единственного решения (3)

Формально «работа» метода Гаусса–Жордана завершена. Но мы сделаем еще один дополнительный шаг: разделим каждую строку последней матрицы на элемент, стоящий в основной части этой матрицы на главной диагонали (т.е. разделим первую строку на 13, а вторую и третью строки — на -13):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & -13 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Система линейных уравнений, соответствующая последней матрице, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Ясно, что по существу это не система уравнений, а (единственное) решение системы (14).

Диагональная и единичная матрицы

Перенесем полученную информацию на общий случай. Для этого надо ввести несколько новых понятий.

Определения

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* матрицы A. Матрица A называется *диагональной*, если все ее элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю. Диагональная матрица порядка n, в которой все элементы на главной диагонали равны 1, т.е. матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

называется *единичной матрицей* и обозначается через E_n.

Основываясь на последнем из приведенных выше примеров, сформулируем «матричную версию» метода Гаусса–Жордана для систем, имеющих единственное решение.

Предположим, что из каких-то соображений нам известно, что система линейных уравнений имеет единственное решение. Чтобы найти его, надо с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы привести ее основную часть к единичному виду (в рассматриваемом случае это всегда можно сделать). Последний столбец полученной матрицы будет являться (единственным) решением исходной системы.