Тема 1-3: Соответствия и отношения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть X, Y — непустые множества.

Определения

Соответствием из множества X в множество Y называется всякое непустое подмножество $\alpha \subseteq X \times Y$.
Областью определения соответствия α называется множество $D(\alpha) = \{x \in X | \exists y \in Y : (x, y) \in \alpha\}$.
Областью значений соответствия α называется множество $E(\alpha) = \{y \in Y | \exists x \in X : (x, y) \in \alpha\}$.

Очевидно, что $D(\alpha) \subseteq X$, $E(\alpha) \subseteq Y$ и $D(\alpha) \neq \emptyset$, $E(\alpha) \neq \emptyset$.

Типы соответствий

Пусть α — соответствие из множества X в множество Y.

Основные свойства

Соответствие α называется *функциональным*, если для любых $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ из $(x, y_1) \in \alpha$ и $(x, y_2) \in \alpha$ следует $y_1 = y_2$.
Соответствие α называется *инъективным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ из $(x_1, y) \in \alpha$ и $(x_2, y) \in \alpha$ следует $x_1 = x_2$.
Соответствие α называется *сюръективным*, если $E(\alpha) = Y$, т.е. для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой что $(x, y) \in \alpha$.
Соответствие α называется *всюду определенным*, если $D(\alpha) = X$, т.е. для любого $x \in X$ существует $y \in Y$ такой что $(x, y) \in \alpha$.

Типы соответствий

Всюду определенное функциональное соответствие из множества X в множество Y называется *отображением* множества X *в* множество Y.
Сюръективное отображение из множества X в множество Y называется отображением множества X *на* множество Y.
Инъективное отображение из множества X на множество Y называется *биекцией* множества X на множество Y или *взаимно однозначным соответствием* множества X на множество Y.

Примеры соответствий (язык диаграмм)

Соответствия между конечными множествами можно изображать диаграммами, в которых элементы множеств изображаются точками, а тот факт, что упорядоченная пара (a, b) принадлежит соответствию, изображается стрелкой $a \longrightarrow b$.

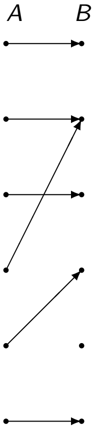

Рис. 1

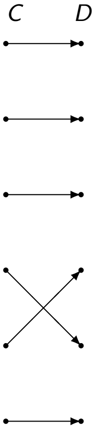

Рис. 2

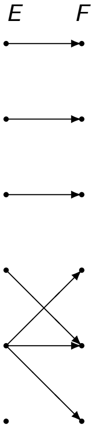

Рис. 3

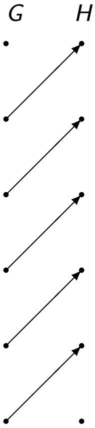

Рис. 4

Отображение α из множества X в множество Y кратко принято записывать так: $\alpha : X \longrightarrow Y$.
Вместо $(x, y) \in \alpha$ в случае, когда α – отображение, будем писать $y = \alpha(x)$.
При определении отображения α будем писать $x \mapsto \alpha(x)$.
Термин "*функция*" будет использоваться как синоним для термина "отображение".
Отображение $\alpha : X \longrightarrow Y$ будет инъективным тогда и только тогда, когда $\forall x_1, x_2 \in X \ (\alpha(x_1) = \alpha(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)$.
Отображение $\alpha : X \longrightarrow Y$ будет сюръективным тогда и только тогда, когда $\forall y \in Y \exists x \in X : \alpha(x) = y$.

Положим $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Тогда отображение $x \mapsto x^2$ будет отображением $\mathbb{R}$ *в* $\mathbb{R}$, отображением $\mathbb{R}$ *на* $\mathbb{R}^+$ и *биекцией* $\mathbb{R}^+$ *на* $\mathbb{R}^+$.

Пусть α — соответствие из множества X в множество Y.

Определение

Обратным соответствием к соответствию α называется соответствие $\{(y, x) | (x, y) \in \alpha\}$ из множества Y в множество X.

Указанное соответствие обозначается через α^{-1}.
Из определений сл.2 следует, что $E(\alpha^{-1}) = D(\alpha)$ и $D(\alpha^{-1}) = E(\alpha)$ для любого соответствия α.
Из определений сл.3 следует, что
α является функциональным $\Longleftrightarrow$ α^{-1} является инъективным,
α является всюду определенным $\Longleftrightarrow$ α^{-1} является сюръективным.

Определение

Отображение α из множества X в множество Y называется *обратимым*, если обратное соответствие α^{-1} является отображением Y на X. Отображение α^{-1} при этом называется *обратным* к отображению α.

Из утверждений сл.6 следует, что отображение α является обратимым тогда и только тогда, когда оно является биекцией. При этом обратное отображение α^{-1} также является биекцией.

Отображение $x \mapsto x^2$ множества $\mathbb{R}^+$ на $\mathbb{R}^+$ является обратимым и обратным к нему будет отображением $x \mapsto \sqrt{x}$.

Пусть α — соответствие из множества X в множество Y, β — соответствие из множества Y в множество Z.

Определение

Произведением соответствий α и β называется подмножество декартова произведения $X \times Z$, определяемое формулой

$$\alpha \circ \beta = \{(x, z) | \exists y \in Y : (x, y) \in \alpha, (y, z) \in \beta\}.$$

Легко видеть, что $\alpha \circ \beta$ является соответствием тогда и только тогда, когда $E(\alpha) \cap D(\beta) \neq \emptyset$.
Очевидно также, что произведение отображений является отображением.
Обозначать произведение γ отображения $\alpha : X \longrightarrow Y$ на $\beta : Y \longrightarrow Z$ будем через $\beta \bullet \alpha$, так как $\gamma(x) = \beta(\alpha(x))$ для любого $x \in X$.
Если $\alpha : X \longrightarrow Y$ и $\beta : Y \longrightarrow Z$ являются инъективными [сюръективными] отображениями, то их произведение $\beta \bullet \alpha$ будет инъективным [сюръективным] отображением.
В случае инъективности если $(\beta \bullet \alpha)(x_1) = (\beta \bullet \alpha)(x_2)$, то $\beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2))$, откуда $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ и $x_1 = x_2$.
Для сюръективности проверка оставляется в качестве упражнения.
Отсюда следует, что произведение двух биекций является биекцией.

Пусть X — непустое множество.

Определение

Бинарным отношением на множестве X называется соответствие из множества X в X, т.е. всякое подмножество декартова квадрата X^2.

Пусть $\alpha \subseteq X^2$. Вместо $(x, y) \in \alpha$ обычно пишут $x \alpha y$.

Свойства бинарных отношений

Пусть $\alpha \subseteq X^2$.

Определения

1. Если для любого $x \in X$ имеет место $x\alpha x$, то отношение α называется *рефлексивным*.
2. Если для любых $x, y \in X$ из $x\alpha y$ следует $y\alpha x$ то отношение α называется *симметричным*.
3. Если для любых $x, y, z \in X$ из $x\alpha y$ и $y\alpha z$ следует $x\alpha z$, то отношение α называется *транзитивным*.
4. Если для любых $x, y \in X$ из $x\alpha y$ и $y\alpha x$ следует $x = y$, то отношение α называется *антисимметричным*.

Обозначения и названия

Положим $\triangle_X = \{(x, x) | x \in X\}$, $\triangledown_X = X \times X$.Тогда $\triangle_X$ называется *отношением равенства*, а $\triangledown_X$ — *универсальным отношением* на множестве X.

Справедливы следующие утверждения:

1. Бинарное отношение α симметрично $\iff \alpha^{-1} \subseteq \alpha \iff \alpha^{-1} = \alpha$.
2. Бинарное отношение α транзитивно $\iff \alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$.
3. Бинарное отношение α антисимметрично $\iff \alpha^{-1} \cap \alpha = \triangle$.

Определения

Рефлексивное симметричное транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности*.
Система подмножеств $\{A_i | i \in I\}$ множества X называется *разбиением*, если $A_i \neq \emptyset$ при всех $i \in I$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $X = \cup_{i \in I} A_i$.
Пусть α — отношение эквивалентности на множестве X, $x \in X$. Классом эквивалентности элемента x по отношению α называется множество $\{y \in X | y \alpha x\}$. Оно обозначается через x^α.

Теорема

Для любого отношения эквивалентности α на множестве X множество всех классов эквивалентности по α образует разбиение множества X.
Для любого разбиения $\{A_i | i \in I\}$ множества X бинарное отношение, определенное условием $x \alpha y \iff x, y \in A_i$ для некоторого $i \in I$, является отношением эквивалентности, и его классы эквивалентности являются множествами A_i $(i \in I)$.

Множество всех классов эквивалентности элементов множества X по отношению эквивалентности α называется *фактормножеством* и обозначается через X/α.

$\Downarrow$Пусть α — отношение эквивалентности на множестве X.
Так как $x \in x^\alpha$, $x^\alpha \neq \emptyset$ и $X = \cup_{x \in X} x^\alpha$.
Убедимся, что $x^\alpha \cap y^\alpha = \emptyset$ при $x^\alpha \neq y^\alpha$. Для этого докажем, что

$$x^\alpha \cap y^\alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow x\alpha y \Leftrightarrow x^\alpha = y^\alpha.$$

Пусть $z \in x^\alpha \cap y^\alpha$. Тогда $z\alpha x$ и $z\alpha y$, откуда в силу симметричности отношения α следует $x\alpha z$ и в силу транзитивности $x\alpha y$. Следовательно, $x^\alpha \cap y^\alpha \neq \emptyset \Rightarrow x\alpha y$.
Обратное утверждение очевидно, так как из $x\alpha y$ следует $x \in y^\alpha$ и значит $x \in x^\alpha \cap y^\alpha$.
Мы доказали, что $x^\alpha \cap y^\alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow x\alpha y$. Если $x\alpha y$, то для любого $z \in x^\alpha$ имеем $z\alpha x$, откуда в силу транзитивности α следует $z\alpha y$, т.е. $z \in y^\alpha$. Мы видим, что $x^\alpha \subseteq y^\alpha$.
Поскольку из $x\alpha y$ в силу симметричности отношения α следует $y\alpha x$, аналогично получаем $y^\alpha \subseteq x^\alpha$, т.е. $x^\alpha = y^\alpha$. Если $x^\alpha = y^\alpha$, то очевидно, что $x \in y^\alpha$, и $x\alpha y$. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть $\{A_i | i \in I\}$ — разбиение множества X и α — бинарное отношение, определенное условием $x\alpha y \iff x, y \in A_i$ для некоторого $i \in I$. Очевидно, что отношение α рефлексивно и симметрично.
Пусть $x\alpha y$ и $y\alpha z$. Тогда $x, y \in A_i$ и $y, z \in A_j$ для некоторых $i, j \in I$. Так как $y \in A_i \cap A_j$, заключаем, что $i = j$ и $x\alpha z$. Этим доказана транзитивность α. Следовательно, α — отношение эквивалентности.
Из определений класса эквивалентности и отношения α непосредственно следует, что классы эквивалентности α — это в точности множества A_i.
Теорема доказана.$\Uparrow$

1. $X = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, для любых $x, y \in \mathbb{Z}$ $x\rho_n y \iff n$ делит $x - y$.
Очевидно, что отношение ρ_n рефлексивно и симметрично.
Оно транзитивно, так как если $x\rho_n y$ и $y\rho_n z$, то n делит $x - y$ и $y - z$, и потому n делит $x - z = (x - y) + (y - z)$.
Для числа $x \in \mathbb{Z}$ через $\overline{x}_n$ обозначим целое число из отрезка $[0, n-1]$ такое что $x = qn + \overline{x}_n$ для некоторого $q \in \mathbb{Z}$.
Очевидно, что $x\rho_n y \iff \overline{x}_n = \overline{y}_n$. Поэтому фактормножество $\mathbb{Z}/\rho_n$ состоит из n элементов, называемых *вычетами* по модулю n.
Вычет x^{ρ_n} равен $\{\overline{x}_n + qn | q \in \mathbb{Z}\}$.

2. Пусть X, Y — множества и $\varphi : X \longrightarrow Y$ — отображение множества X на множество Y. Определим отношение $\ker(\varphi)$ на множестве X, полагая $x_1 \ker(\varphi) x_2 \iff \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.
Очевидно, что $\ker(\varphi)$ — отношение эквивалентности на множестве X.
Его классы эквивалентности суть полные прообразы элементов множества Y при отображении φ: $\varphi^{-1}(y) = \{x \in X | \varphi(x) = y\}$.
Отображение $\varphi^{-1}(y) \mapsto y$ является биекцией фактормножества $X/\ker(\varphi)$ на множество Y.

Определения

Отношением частичного порядка на множестве X называется рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение на этом множестве. Множество с зафиксированным на нем отношением частичного порядка называется *частично упорядоченным множеством*.

Примеры.

1. Для любого множества X отношение включения $\subseteq$ на булеане $\mathcal{B}(X)$ является отношением частичного порядка.
2. Отношение делимости на множестве натуральных чисел определяется так: для $k, n \in \mathbb{N}$ k *делит* n (обозначение: $k|n$) тогда и только тогда, когда $n = km$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Это отношение является отношением частичного порядка.
3. Естественное отношение порядка $\leq$ на каждом из множеств чисел $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ является отношением частичного порядка.

Определения

Отношением линейного порядка на множестве X называется отношение частичного порядка σ, удовлетворяющее следующему дополнительному условию: для любых $x, y \in X$ имеет место либо $x\sigma y$, либо $y\sigma x$. Последнее условие для бинарного отношения называется *линейностью*. Множество с зафиксированным на нем отношением линейного порядка называется *линейно упорядоченным множеством*.

Примеры.
1. Естественное отношение порядка $\leq$ на каждом из множеств чисел $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ является отношением линейного порядка.
2. Для любого множества X отношение включения $\subseteq$ на булеане $\mathcal{B}(X)$ является отношением линейного порядка тогда и только тогда, когда X — либо пустое, либо одноэлементное множество.
3. Пусть $(X, \leq)$ — линейно упорядоченное множество, $n \in \mathbb{N}$. На множестве X^n определим отношение *лексикографического порядка* $\preceq$: $(x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n)$, если либо $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, либо $x_1 < y_1$, либо существует натуральное число k, такое что $1 \leq k < n$, $x_i = y_i$ для $i = 1, \ldots, k$ и $x_{k+1} < y_{k+1}$.

Проверить, что это отношение является отношением линейного порядка, предоставляется в качестве упражнения.

Определения

Пусть $(X, \leq)$ — частично упорядоченное множество, $M \subseteq X$ — его непустое подмножество.
Элемент m называется *максимальным* элементом множества M, если для любого элемента $x \in M$ из $m \leq x$ следует $x = m$.
Элемент m называется *минимальным* элементом множества M, если для любого элемента $x \in M$ из $x \leq m$ следует $x = m$.

Определения

Пусть $(X, \leq)$ — частично упорядоченное множество, $M \subseteq X$ — его непустое подмножество.
Элемент m называется *наибольшим* элементом множества M, если для любого элемента $x \in M$ имеет место $x \leq m$.
Элемент m называется *наименьшим* элементом множества M, если для любого элемента $x \in M$ имеет место $m \leq x$.

Легко проверить, что наибольший (соотв. наименьший) элемент любого непустого подмножества частично упорядоченного множества единствен. Верно ли это для максимальных и минимальных элементов?
Также ясно, что наибольший элемент является максимальным, а наименьший элемент — минимальным. Верно ли обратное?