

Тема 1-21: Многочлены от нескольких переменных

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть F – поле. Положим $K_1 = F[x_1]$ – кольцо многочленов от переменной x_1 и $K_2 = K_1[x_2]$, где x_2 – независимая переменная, отличная от x_1 . Любой многочлен из K_2 можно записать в виде $\sum_{j=0}^m f_j(x_1)x_2^j = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m \alpha_{ij}x_1^i x_2^j$, где $f_j(x_1) = \sum_{i=0}^k \alpha_{ij}x_1^i$. Положим $F[x_1, x_2] = K_2$. Продолжая по индукции, получим $F[x_1, x_2, \dots, x_n] = F[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}][x_n]$.

Определение

Кольцо $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ называется **кольцом многочленов** над полем F от (коммутирующих) переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Любой элемент кольца $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ является суммой конечного числа одночленов вида $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$, где $\alpha \in F$, s_1, s_2, \dots, s_n – неотрицательные целые числа, и $x_j^0 = 1$. При $\alpha \neq 0$ **степенью** одночлена $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ называется $\sum_{j=1}^n s_j$.

Так как кольцо многочленов от одной переменной над кольцом без делителей нуля само является кольцом без делителей нуля, справедливо следующее

Наблюдение

Кольцо $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ не содержит делителей нуля.

Определение

Говорят, что одночлен $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ *ниже* одночлена $\beta x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$, если $\alpha, \beta \neq 0$ и либо $s_1 < t_1$, либо существует индекс m , $1 \leq m \leq n - 1$ такой что $s_j = t_j$ при $j = 1, \dots, m$ и $s_{m+1} < t_{m+1}$. Обозначение:
 $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n} \prec \beta x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$.

Бинарное отношение \prec называется *лексикографическим порядком* на множестве ненулевых одночленов кольца $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Рекомендуется проверить, что это отношение транзитивно (см. сл.9 т.1-3). На множестве всех одночленов с коэффициентом 1 отношение \preceq является отношением линейного порядка (см. сл.14 т.1-3).

Любой ненулевой многочлен этого кольца имеет *высший член* – такой одночлен, что все остальные ненулевые одночлены, входящие в данный многочлен, ниже его. Например, многочлен $x_1^2 x_3 + x_1 x_2^{10} + x_2^{20} x_3^{100}$ имеет высший член $x_1^2 x_3$.

Лемма

Высший член произведения двух ненулевых многочленов кольца $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ равен произведению их высших членов.

↓ Пусть $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ – высший член многочлена f , $\gamma x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}$ – другой его ненулевой одночлен (если такой существует), $\beta x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ – высший член многочлена g , $\delta x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}$ – другой его ненулевой одночлен (если такой существует). Докажем, что $\alpha \delta x_1^{s_1+q_1} x_2^{s_2+q_2} \dots x_n^{s_n+q_n} < \alpha \beta x_1^{s_1+t_1} x_2^{s_2+t_2} \dots x_n^{s_n+t_n}$. Это очевидно, если $q_1 < t_1$. Пусть $q_j = t_j$ при $j = 1, \dots, m$ и $q_{m+1} < t_{m+1}$. Тогда $s_j + q_j = s_j + t_j$ при $j = 1, \dots, m$ и $s_{m+1} + q_{m+1} < s_{m+1} + t_{m+1}$, что и требуется доказать. Аналогично доказывается, что $\beta \gamma x_1^{p_1+t_1} x_2^{p_2+t_2} \dots x_n^{p_n+t_n} < \alpha \beta x_1^{s_1+t_1} x_2^{s_2+t_2} \dots x_n^{s_n+t_n}$. Докажем, что $\gamma \delta x_1^{p_1+q_1} x_2^{p_2+q_2} \dots x_n^{p_n+q_n} < \alpha \beta x_1^{s_1+t_1} x_2^{s_2+t_2} \dots x_n^{s_n+t_n}$. Это очевидно, если $p_1 < s_1$ или $q_1 < t_1$. Пусть $p_j = s_j$ при $j = 1, \dots, m$, $p_{m+1} < s_{m+1}$ и $q_j = t_j$ при $j = 1, \dots, \ell$, $q_{\ell+1} < t_{\ell+1}$. Пусть k – наименьшее из чисел m, ℓ . Тогда ясно, что $p_j + q_j = s_j + t_j$ при $j = 1, \dots, k$ и $p_{k+1} + q_{k+1} < s_{k+1} + t_{k+1}$. ↑

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$, σ – подстановка на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим через f_σ многочлен $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, полученный из многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ заменой переменных x_1, x_2, \dots, x_n переменными $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}$. Например, если $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 x_3$ и $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, то $f_\sigma = x_1 x_3^2 + 2x_1^2 x_2 x_3$.

Определение

Многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ называется **симметрическим**, если для любой подстановки σ на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ имеет место равенство $f_\sigma = f$.

Из определения сразу следует

Наблюдение

Высший член любого симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет вид $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, где $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$.

Каждый одночлен $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, где $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$, порождает **однородный** симметрический многочлен $\sum_{\sigma \in S_n} (\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})_\sigma$.

Определение

Следующие симметрические многочлены от n переменных называются

элементарными: $s_1 = x_1 + \dots + x_n$, $s_2 = \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k, \dots$,
 $s_m = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} x_{j_1} \dots x_{j_m}, \dots$, $s_n = x_1 \dots x_n$.

Например, $s_1(x, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$,

$s_2(x, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$,

$s_3(x, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$,

$s_4(x, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4$.

Теорема

Для любого ненулевого симметрического многочлена $f(x_1, \dots, x_n)$ существует единственный многочлен $g(y_1, \dots, y_n)$ такой что $f(x_1, \dots, x_n) = g(s_1(x_1, \dots, x_n), \dots, s_n(x_1, \dots, x_n))$.

↓ Пусть $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ – высший член симметрического многочлена $f(x_1, \dots, x_n)$. Учитывая, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$, определим многочлен $g_1(y_1, \dots, y_n) = \alpha y_1^{k_1 - k_2} \dots y_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} y_n^{k_n}$, где нулевая степень переменной равна 1. Легко понять, что высший член многочлена s_m^r равен $x_1^r \dots x_m^r$, поэтому согласно лемме сл.4 высший член $g_1(s_1, \dots, s_n)$ равен $\alpha x_1^{k_1 - k_2} (x_1 x_2)^{k_2 - k_3} \dots (x_1 \dots x_{n-1})^{k_{n-1} - k_n} (x_1 \dots x_n)^{k_n} = \alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$

Следовательно, многочлен $f_1(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - g_1(s_1(x_1, \dots, x_n), \dots, s_n(x_1, \dots, x_n))$ имеет высший член ниже $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$. Применяя к его высшему члену те же рассуждения, получаем многочлен $g_2(y_1, \dots, y_n)$ такой, что $f_1(x_1, \dots, x_n) - g_2(s_1(x_1, \dots, x_n), \dots, s_n(x_1, \dots, x_n))$ имеет высший член ниже высшего члена $f_1(x_1, \dots, x_n)$. Так как существует лишь конечное число одночленов вида $\beta x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \dots x_n^{\ell_n}$ со свойством $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_n$, которые ниже $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, через конечное число шагов многочлен $g(y_1, \dots, y_n)$ будет построен.

Установим единственность. Предположим, что существуют различные многочлены $g(y_1, \dots, y_n)$ и $h(y_1, \dots, y_n)$ такие, что $g(s_1(x_1, \dots, x_n), \dots, s_n(x_1, \dots, x_n)) = h(s_1(x_1, \dots, x_n), \dots, s_n(x_1, \dots, x_n))$. Тогда $(g - h)(s_1(x_1, \dots, x_n), \dots, s_n(x_1, \dots, x_n)) = 0$ и $g - h \neq 0$. Для одночлена $\gamma y_1^{r_1} \dots y_n^{r_n}$ высший член симметрического многочлена $\gamma s_1^{r_1} \dots s_n^{r_n}$ имеет вид $x_1^{r_1} (x_1 x_2)^{r_2} \dots (x_1 \dots x_{n-1})^{r_{n-1}} (x_1 \dots x_n)^{r_n} = x_1^{r_1 + \dots + r_n} x_2^{r_2 + \dots + r_n} \dots x_n^{r_n}$. По этому одночлену степени переменных одночлена $\gamma y_1^{r_1} \dots y_n^{r_n}$ определяются однозначно. Выберем среди одночленов многочлена $g - h$ такой одночлен p , у которого высший член q соответствующего симметрического многочлена выше высших членов симметрических многочленов для остальных одночленов. Тогда q не может взаимно уничтожиться при замене y_m на s_m в $g - h$. Получаем противоречие. Теорема полностью доказана. ↑

Выразить симметрический многочлен $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} (x_1^4 x_2^2 x_3)_\sigma + \sum_{\sigma \in S_3} (x_1^3 x_2^2)_\sigma$ через элементарные симметрические многочлены.

Применим метод неопределенных коэффициентов. Запишем возможные распределения показателей при x_1, x_2, x_3 высших членов симметрических многочленов, которые ниже $x_1^4 x_2^2 x_3$ (соотв. ниже $x_1^3 x_2^2$):

x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3	
4	2	1	$s_1^2 s_2 s_3$	3	2	0	$s_1 s_2^2$
3	3	1	$s_2^2 s_3$	3	1	1	$s_1^2 s_3$
3	2	2	$s_1 s_3^2$	2	2	1	$s_2 s_3$

Положим $f_1 = \sum_{\sigma \in S_3} (x_1^4 x_2^2 x_3)_\sigma$ и $f_2 = \sum_{\sigma \in S_3} (x_1^3 x_2^2)_\sigma$. Тогда $f_1 = s_1^2 s_2 s_3 + \alpha s_2^2 s_3 + \beta s_1 s_3^2$ и $f_2 = s_1 s_2^2 + \gamma s_1^2 s_3 + \delta s_2 s_3$. Для определения $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ придадим x_1, x_2, x_3 конкретные значения и вычислим соответствующие значения f_1, f_2, s_1, s_2, s_3 . Получим уравнения относительно $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	s_1	s_2	s_3		
1	1	1	6	6	3	3	1	$6 = 27 + 9\alpha + 3\beta$	$6 = 27 + 9\gamma + 3\delta$
1	-1	1	2	2	1	-1	-1	$2 = 1 - \alpha + \beta$	$2 = 1 - \gamma + \delta$

$$\begin{cases} 9\alpha + 3\beta = -21, \\ \alpha - \beta = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} 9\gamma + 3\delta = -21, \\ \gamma - \delta = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} 12\alpha = -24, \\ \beta = 1 + \alpha. \end{cases}$$

Получаем $\alpha = \gamma = -2$, $\beta = \delta = -1$. Таким образом,

$$f(x_1, x_2, x_3) = s_1^2 s_2 s_3 - 2s_2^2 s_3 - s_1 s_3^2 + s_1 s_2^2 - 2s_1^2 s_3 - s_2 s_3, \text{ т.е.}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(s_1, s_2, s_3), \text{ где}$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 y_2 y_3 - 2y_2^2 y_3 - y_1 y_3^2 + y_1 y_2^2 - 2y_1^2 y_3 - y_2 y_3.$$

Рассмотрим многочлен $(y - x_1)(y - x_2) \dots (y - x_n)$ от переменных y, x_1, \dots, x_n . Раскрывая скобки и записывая полученный многочлен как элемент из $K[x_1, \dots, x_n][y]$ и принимая во внимание, что y^{n-k} получается, когда из некоторых $n - k$ скобок берется y , а из оставшихся k скобок $-x_j$, приходим к формуле

$$(y - x_1)(y - x_2) \dots (y - x_n) = y^n - s_1(x_1, \dots, x_n)y^{n-1} + s_2(x_1, \dots, x_n)y^{n-2} + \dots + (-1)^k s_k(x_1, \dots, x_n)y^{n-k} \dots + (-1)^n s_n(x_1, \dots, x_n), \quad (1)$$

где $s_k(x_1, \dots, x_n)$ – элементарный симметрический многочлен (см. сл.б).

Теорема

Пусть $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, $a_n \neq 0$, и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – все корни многочлена $f(x)$ с учетом кратности. Тогда для $k = 1, \dots, n$ справедливо равенство $s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$.

Для доказательства достаточно записать неприводимое разложение $f(x) = a_0(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$ и сравнить с формулой (1).

При $n = 2$ получается известная из школьного курса математики теорема Виета для корней квадратного уравнения.

Вычисление значений симметрического многочлена от корней многочлена

Обобщенная теорема Виета вместе с теоремой сл.б позволяет вычислять значения симметрического многочлена от n переменных от всех комплексных корней многочлена n -й степени из $\mathbb{C}[x]$, не вычисляя эти корни. Рассмотрим пример.

Найти значение симметрического многочлена $f(x_1, x_2, x_3)$, указанного на сл.9, от комплексных корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ многочлена $h(x) = 4x^3 + 8x^2 + 5x + 7$.

Вычислим с помощью теоремы сл.10 значения элементарных симметрических многочленов $s_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -2$, $s_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{5}{4}$, $s_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\frac{7}{4}$. Представим $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов, используя результаты сл.9:
 $f(x_1, x_2, x_3) = g(s_1, s_2, s_3)$, где
 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 y_2 y_3 - 2y_2^2 y_3 - y_1 y_3^2 + y_1 y_2^2 - 2y_1^2 y_3 - y_2 y_3$. Следовательно,
 $f(x_1, x_2, x_3) = g(-2, \frac{5}{4}, -\frac{7}{4}) = \frac{177}{32} = 5\frac{17}{32}$.

Заметим, что если коэффициенты многочлена $h(x)$ и симметрического многочлена $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежат числовому полю F , то и значения элементарных симметрических многочленов $s_k(x_1, \dots, x_n)$ от всех корней h , и коэффициенты многочлена, посредством которого f выражается через s_k , также принадлежат полю F , и потому значение $f(x_1, \dots, x_n)$ от всех корней h принадлежит полю F .