Тема 1-20: Квадрики в пространстве

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Определение квадрики в пространстве

Определение

Алгебраическим уравнением второй степени с тремя неизвестными называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_4 = 0, \tag{1}$$

где по крайней мере один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ отличен от нуля.

Определение

Квадрикой в пространстве называется геометрический образ алгебраического уравнения второй степени с тремя неизвестными относительно фиксированной аффинной системы координат.

Корректность этого определения проверяется точно так же, как в т.1-19 (см. сл.2 и 3). Запишем уравнение (1) в матричной форме:

$$X^\top \cdot A \cdot X + 2B \cdot X + a_4 = 0, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \neq O,$$

$B = (a_1, a_2, a_3)$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. При изменении системы координат новые координаты точки обозначим $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$. Запишем формулы преобразования координат (см. сл.30,31 т.1-12) в матричном виде:

$X = C + T \cdot X_1$, где $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$ — матрица перехода,

$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ — столбец координат нового начала координат.

Далее следует воспользоваться матричными выкладками сл.3 т.1-19.

Нашей целью изучения квадрик является их полная классификация. Для ее осуществления требуется сначала изучить некоторые конкретные квадрики в пространстве.

Определение

Цилиндрической поверхностью называется множество всех точек всевозможных прямых, коллинеарных фиксированному вектору $\vec{a} \neq \vec{0}$ и проходящих через все точки некоторой линии ℓ. Эта линия называется *направляющей*, а любая прямая, коллинеарная вектору $\vec{a}$ и лежащая на цилиндрической поверхности — *образующей* этой поверхности.

Из определения цилиндрической поверхности следует, что она имеет направляющую, лежащую в некоторой плоскости. В качестве такой направляющей можно взять пересечение цилиндрической поверхности с некоторой плоскостью, перпендикулярной к образующим этой поверхности.

Теорема

Для любой цилиндрической поверхности существует прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, относительно которой эта поверхность задается уравнением $F(x,y)=0$.

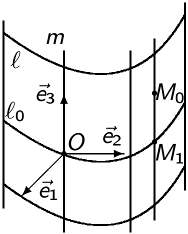

Рис. 1

$\Downarrow$Рассмотрим цилиндрическую поверхность с направляющей ℓ и образующей m (см. рис.1). Выберем на прямой m точку O и отложим от нее орт $\vec{e}_3$, коллинеарный m. Возьмем какой-нибудь орт $\vec{e}_1$, перпендикулярный $\vec{e}_3$, и положим $\vec{e}_2=[\vec{e}_3,\vec{e}_1]$. Тогда $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ — прямоугольная декартова система координат. Обозначим через ℓ_0 пересечение цилиндрической поверхности с плоскостью Oxy построенной системы координат. Пусть $F(x,y)=0$ — уравнение кривой ℓ_0 в системе координат $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ на плоскости Oxy. Покажем, что в системе координат $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ уравнение $F(x,y)=0$ определяет рассматриваемую цилиндрическую поверхность. Выберем на поверхности произвольную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Она лежит на некоторой образующей, которая пересекает линию ℓ_0 в точке $M_1(x_0,y_0,0)$. Следовательно, $F(x_0,y_0)=0$.

Окончание доказательства теоремы

Пусть теперь $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка пространства, для которой $F(x_0, y_0) = 0$. Опустим из точки M_0 перпендикуляр на плоскость Oxy. Его основание — точка $M_1(x_0, y_0, 0)$. Так как $F(x_0, y_0) = 0$, точка M_1 лежит на кривой ℓ_0. Следовательно, точка M_0 лежит на цилиндрической поверхности.$\Uparrow$

Из теоремы немедленно получается получается

Следствие

Если в уравнении поверхности в прямоугольной декартовой системе координат отсутствует какая-либо переменная, то это уравнение определяет цилиндрическую поверхность, направляющая которой в соответствующей координатной плоскости определяется уравнением поверхности, а образующие параллельны оси координат, отвечающей отсутствующему неизвестному.

Например, уравнение $F(x, z) = 0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, направляющая которой в плоскости Oxz имеет уравнение $F(x, z) = 0$, а образующие параллельны оси Oy.

Определения

Цилиндром 2-го порядка называется цилиндрическая поверхность, у которой направляющая является квадрикой на плоскости, а образующие перпендикулярны этой плоскости.
Эллиптическим цилиндром называется геометрический образ уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат в пространстве.
Гиперболическим цилиндром называется геометрический образ уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат в пространстве.
Параболическим цилиндром называется геометрический образ уравнения $y^2 = 2px$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат в пространстве.

Последние три типа цилиндров 2-го порядка изображены на рис.2-4 на следующем слайде.

Из теоремы о классификации квадрик на плоскости (сл.8 т.1-19) следует, что помимо трех перечисленных выше типов цилиндров 2-го порядка, к ним относятся пара пересекающихся плоскостей, пара параллельных плоскостей, плоскость, прямая и пустое множество.

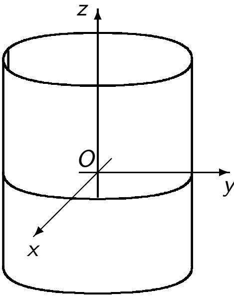

Рис.2. Эллиптический цилиндр

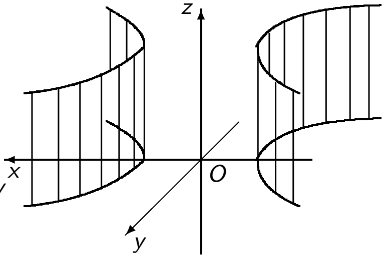

Рис.3. Гиперболический цилиндр

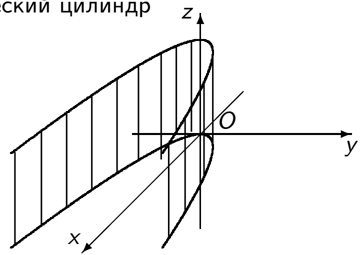

Рис.3. Параболический цилиндр

Определение

Конической поверхностью называется множество всех точек всевозможных прямых, проходящих через каждую точку фиксированной линии ℓ и фиксированную точку C, не лежащую на линии ℓ. При этом линия ℓ называется *направляющей*, а точка C — *вершиной* конической поверхности.

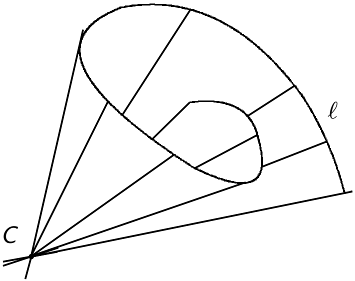

Рис. 5

Определение

Конусом 2-го порядка называется геометрический образ уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $(a,b,c>0)$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Теорема

Конус 2-го порядка является конической поверхностью с вершиной в начале координат и направляющей ℓ, заданной уравнениями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=c$.

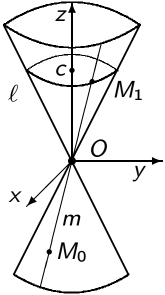

Рис. 6

$\Downarrow$Пусть точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\neq O$ лежит на конической поверхности. Тогда прямая m, проходящая через точки M_0 и O, пересекает направляющую ℓ в некоторой точке M_1 (см. рис.6). Параметрические уравнения прямой m имеют вид $x=x_0t$, $y=y_0t$, $z=z_0t$. Ясно, что $z_0\neq 0$. Точка M_1 имеет координаты x_1,y_1,c. Следовательно, $z_0t=c$ и $t=\frac{c}{z_0}$, откуда $x_1=\frac{cx_0}{z_0}$, $y_1=\frac{cy_0}{z_0}$. Так как точка M_1 лежит на поверхности $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, имеет место равенство

$\dfrac{(cx_0)^2}{(z_0a)^2} + \dfrac{(cy_0)^2}{(z_0b)^2} = 1$. Отсюда следует $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2} = 0$, т.е. точка M_0 лежит на конусе 2-го порядка.

Предположим, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \neq O$ лежит на конусе 2-го порядка. Тогда $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2} = 0$. Ясно, что тогда $z_0 \neq 0$. Проведем через точки M_0 и O прямую m и покажем, что она пересекает линию ℓ. Параметрические уравнения прямой m имеют вид $x = x_0t$, $y = y_0t$, $z = z_0t$. Она пересекает плоскость $z = c$ в точке $M_1(x_1, y_1, c)$. Покажем, что $M_1 \in \ell$. Для этого убедимся, что $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$. Так как $z_0t = c$, имеем $t = \dfrac{c}{z_0}$ и $x_1 = \dfrac{cx_0}{z_0}$, $y_1 = \dfrac{cy_0}{z_0}$. Найдем $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = \dfrac{(cx_0)^2}{(z_0a)^2} + \dfrac{(cy_0)^2}{(z_0b)^2} = \left(\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}\right)\dfrac{c^2}{z_0^2} = 1$, поскольку $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2} = 0$. Таким образом, точка M_1 лежит на линии ℓ.$\Uparrow$

Определение

Эллипсоидом называется геометрический образ уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c>0)$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму эллипсоида *методом сечений*. Это означает, что мы изучаем сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxy, Oxz, Oyz.

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью $z=h$, параллельной координатной плоскости Oxy. Это сечение определяется системой уравнений $\left\{\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ z=h,\end{array}\right.$ равносильной системе $\left\{\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{array}\right.$ При $|h|>c$ получается пустое множество, при $|h|=c$ — точки $(0,0,\pm c)$, называемые *вершинами* эллипсоида, при $|h|<c$ — эллипсы с полуосями $\frac{a\sqrt{c^2-h^2}}{|c|}$ и $\frac{b\sqrt{c^2-h^2}}{|c|}$.

Так как все переменные входят в уравнение эллипсоида симметрично, сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz устроены точно так же. Эллипсоид изображен на рис.7.

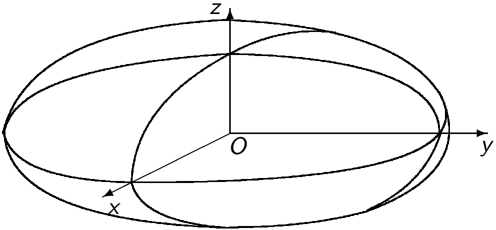

Рис. 7

Определение

Однополостным гиперболоидом называется геометрический образ уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c>0)$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму однополостного гиперболоида методом сечений. Рассмотрим его сечение плоскостью $z=h$, параллельной координатной плоскости Oxy. Это сечение определяется системой уравнений $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ z=h, \end{cases}$ равносильной системе $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$

Оно является эллипсом с полуосями $\frac{a\sqrt{h^2+c^2}}{|c|}$ и $\frac{b\sqrt{h^2+c^2}}{|c|}$. При $c=0$ получается *горловой эллипс* однополостного гиперболоида. При увеличении $|h|$ полуоси эллипса неограниченно возрастают.

Сечение плоскостью $x=h$, параллельной координатной плоскости Oyz, определяется системой уравнений $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}, \\ x=h. \end{cases}$ При $|h|<a$ получается гипербола с полуосями $\frac{b\sqrt{a^2-h^2}}{|a|}$, $\frac{c\sqrt{a^2-h^2}}{|a|}$.

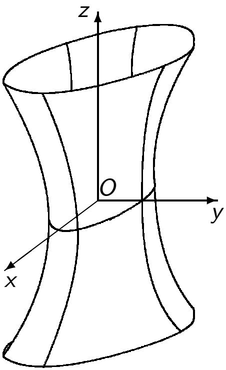

Рис. 8

При $|h| = a$ получается пара пересекающихся прямых, при $|h| > a$ — сопряженная гипербола с полуосями $\dfrac{b\sqrt{h^2 - a^2}}{|a|}$, $\dfrac{c\sqrt{h^2 - a^2}}{|a|}$. Сечение плоскостью $y = h$, параллельной координатной плоскости Oxz, имеет аналогичное строение.

Однополостный гиперболоид изображен на рис.8.

Определение

Двуполостным гиперболоидом называется геометрический образ уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ $(a, b, c > 0)$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму двуполостного гиперболоида методом сечений. Рассмотрим его сечение плоскостью $z = h$, параллельной координатной плоскости Oxy. Это сечение определяется системой уравнений $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$ При $|h| < c$ получается пустое множество, при $|h| = c$ — точки $(0, 0, \pm c)$, называемые *вершинами* двуполостного гиперболоида, при $|h| > c$ — эллипсы с полуосями $\frac{a\sqrt{h^2 - c^2}}{|c|}$ и $\frac{b\sqrt{h^2 - c^2}}{|c|}$.

При увеличении $|h|$ полуоси эллипса неограниченно возрастают.

Сечение плоскостью $x = h$, параллельной координатной плоскости Oyz, определяется системой уравнений $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$ и представляет собой сопряженную гиперболу.

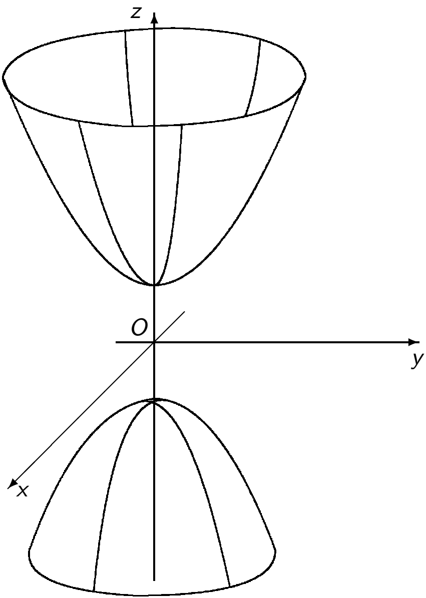

Рис. 9

Сечение плоскостью $y = h$, параллельной координатной плоскости Oxz, имеет аналогичное строение.

Двуполостный гиперболоид изображен на рис.9.

Определение

Эллиптическим параболоидом называется геометрический образ уравнения $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$ $(p, q > 0)$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму эллиптического параболоида методом сечений. Его сечение плоскостью $z = h$, параллельной координатной плоскости Oxy, определяется системой уравнений $\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$ При $|h| < 0$ получается пустое множество, при $|h| = 0$ — точка $O(0, 0, 0)$, называемая *вершиной* эллиптического параболоида, при $|h| > c$ — эллипс с полуосями $\sqrt{2ph}$ и $\sqrt{2qh}$. При увеличении h полуоси эллипса неограниченно возрастают.

Сечение плоскостью $x = h$, параллельной координатной плоскости Oyz, определяется системой уравнений $\begin{cases} \dfrac{y^2}{q} = 2z - \dfrac{h^2}{p}, \\ x = h, \end{cases}$ или

$\begin{cases} y^2 = 2q(z - \dfrac{h^2}{2p}), \\ x = h, \end{cases}$ и представляет собой параболу.

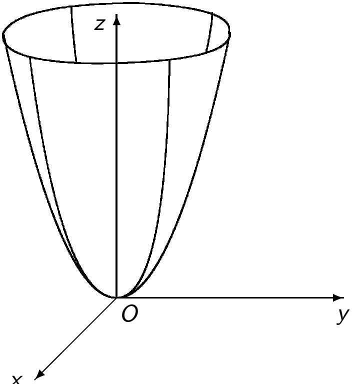

Рис. 10

Сечение плоскостью $y = h$, параллельной координатной плоскости Oxz, имеет аналогичное строение.

Эллиптический параболоид изображен на рис.10.

Благодаря оптическому свойству параболы (сл.28 т.1-18) всевозможные отражатели света (предназначением от карманного фонарика до мощного прожектора) имеют форму эллиптического параболоида, обычно получаемого вращением дуги параболы вокруг оси симметрии.

Определение

Гиперболическим параболоидом называется геометрический образ уравнения $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$ $(p, q > 0)$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму гиперболического параболоида методом сечений. Его сечение плоскостью $z = h$, параллельной координатной плоскости Oxy, определяется системой уравнений $\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$ При $|h| < 0$ получается сопряженная гипербола с полуосями $\sqrt{2ph}$ и $\sqrt{2qh}$, при $|h| = 0$ — пара пересекающихся прямых $y = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}x$, $z = 0$ и при $|h| > 0$ — гипербола с полуосями $\sqrt{2ph}$ и $\sqrt{2qh}$. Эти сечения не дают хорошего представления о форме гиперболического параболоида.

Сечение плоскостью $x = h$, параллельной координатной плоскости Oyz, определяется системой уравнений $\begin{cases} \dfrac{y^2}{q} = \dfrac{h^2}{p} - 2z, \\ x = h, \end{cases}$ или

$\begin{cases} y^2 = -2q\left(z - \dfrac{h^2}{2p}\right), \\ x = h, \end{cases}$ и представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз. Вершина этой параболы находится в точке $M_h\left(h, 0, \dfrac{h^2}{2p}\right)$.

Сечение плоскостью $y = h$, параллельной координатной плоскости Oxz, определяется системой уравнений $\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} = 2z + \dfrac{h^2}{q}, \\ y = h, \end{cases}$ или

$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z + \dfrac{h^2}{2q}\right), \\ y = h, \end{cases}$ и представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. При $h = 0$ получаем параболу $x^2 = 2pz$, $y = 0$. Очевидно, что точка M_h лежит на этой параболе.

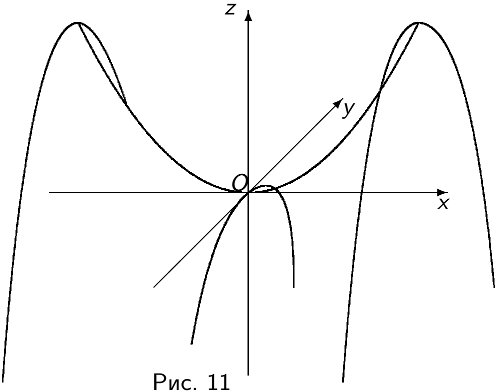

Рис. 11

Гиперболический параболоид можно представить себе как поверхность, полученную перемещением параболы $y^2 = -2qz$, ветви которой направлены вниз, расположенной в плоскости, параллельной координатной плоскости Oyz, так, что вершина этой параболы скользит по параболе $x^2 = 2pz$, расположенной в координатной плоскости Oxz, ветви которой направлены вверх.

Гиперболический параболоид изображен на рис.12 на следующем слайде.

Вид гиперболического параболоида

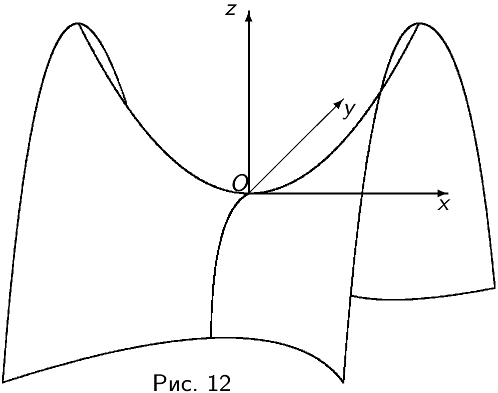

Рис. 12

О классификации квадрик в пространстве

Классификация квадрик в пространстве проводится по плану, аналогичному плану, реализованному для квадрик на плоскости в т.1-19. Сначала уравнение квадрики упрощается за счет выбора подходящей системы координат, а затем определяются геометрические образы полученных уравнений. Уравнение квадрики сразу рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат.

Теорема

С помощью преобразования прямоугольной декартовой системы координат (преобразования ортонормированного базиса и параллельного переноса) общее уравнение квадрики в пространстве
$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_4 = 0$
может приведено к одному из следующих видов:

1. $ax'^2 + by'^2 + cz'2 = d$, где $a, b, c \neq 0$;
2. $ax'^2 + by'^2 + cz' = 0$, где $a, b, c \neq 0$ или уравнению, полученному из данного переименованием неизвестных;
3. $ax'^2 + by'^2 = d$, где $a, b \neq 0$, или уравнению, полученному из данного переименованием неизвестных;
4. $ax'^2 + by' = 0$, где $a, b \neq 0$, или уравнению, полученному из данного переименованием неизвестных;
5. $ax'^2 + d = 0$, где $a \neq 0$, или уравнению, полученному из данного переименованием неизвестного.

$\Downarrow$Преобразование ортонормированного базиса основано на приведении квадратичной формы $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ из уравнения квадрики к главным осям (см. сл.19 и 21-22 т.2-19) и здесь используется соответствующее утверждение без доказательства.

От прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ мы переходим к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1y_1z_1$, в которой уравнение квадрики принимает вид

$$ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + 2ex_1 + 2fy_1 + 2gz_1 + a_4 = 0. \qquad (2)$$

По крайней мере один из коэффициентов a, b, c должен быть отличен от нуля. Рассмотрим имеющиеся возможности.
I. $a, b, c \neq 0$. Выделяя полные квадраты, приводим уравнение (2) к виду $a(x_1 + \frac{e}{a})^2 - \frac{e^2}{a} + b(y_1 + \frac{f}{b})^2 - \frac{f^2}{b} + c(z_1 + \frac{g}{c})^2 - \frac{g^2}{c} + a_4 = 0$. Сделав параллельный перенос по формулам $x' = x_1 + \frac{e}{a}$, $y' = y_1 + \frac{f}{b}$, $z' = z_1 + \frac{g}{c}$ и положив $d = a_4 - \frac{e^2}{a} - \frac{f^2}{b} - \frac{g^2}{c}$, получим уравнение вида 1.
II. $a, b \neq 0$, $c = 0$. Случаи $a, c \neq 0$, $b = 0$ и $b, c \neq 0$, $a = 0$ рассматриваются аналогично. Выделяя полные квадраты, приводим уравнение (2) к виду $a(x_1 + \frac{e}{a})^2 - \frac{e^2}{a} + b(y_1 + \frac{f}{b})^2 - \frac{f^2}{b} + 2gz_1 + a_4 = 0$. Здесь возникают две возможности.
II.1. $g \neq 0$. Положив $a_4' = a_4 - \frac{e^2}{a} - \frac{f^2}{b}$ и сделав параллельный перенос по формулам $x' = x_1 + \frac{e}{a}$, $y' = y_1 + \frac{f}{b}$, $z' = z_1 + \frac{a_4'}{2g}$, получим уравнение вида 2, где роль коэффициента c играет g.

II.2. $g=0$. Положив $d=a_4-\frac{e^2}{a}-\frac{f^2}{b}$ и сделав параллельный перенос по формулам $x'=x_1+\frac{e}{a}$, $y'=y_1+\frac{f}{b}$, $z'=z_1$, получим уравнение вида 3.
III. $a\neq 0$, $b,c=0$. Случаи $a\neq 0$, $b,c=0$ и $b\neq 0$, $a,c=0$ рассматриваются аналогично. Выделяя полный квадрат, приводим уравнение (2) к виду $a(x_1+\frac{e}{a})^2-\frac{e^2}{a}+2fy_1+2gz_1+a_4=0$. Предположим, что $f,g\neq 0$ и покажем, что повернув систему координат вокруг оси Ox_1 на подходящий угол, можно сделать равным нулю коэффициент при z_2 в уравнении квадрики. Формулы преобразования координат $x_1=x_2$, $y_1=y_2\cos\varphi-z_2\sin\varphi$, $z_1=y_2\sin\varphi+z_2\cos\varphi$. Имеем
$2fy_1+2gz_1=2f(y_2\cos\varphi-z_2\sin\varphi)+2g(y_2\sin\varphi+z_2\cos\varphi)=$
$2y_2(f\cos\varphi+g\sin\varphi)+2z_2(-f\sin\varphi+g\cos\varphi)$. Условие $-f\sin\varphi+g\cos\varphi=0$ выполняется при $\operatorname{tg}\varphi=\frac{g}{f}$. Таким образом, без ограничения общности считаем, что уравнение (2) приведено к виду $a(x_1+\frac{e}{a})^2-\frac{e^2}{a}+2fy_1+a_4=0$. Здесь возникают две возможности.
III.1. $f\neq 0$. Положив $a_4'=a_4-\frac{e^2}{a}$ и сделав параллельный перенос по формулам $x'=x_1+\frac{e}{a}$, $y'=y_1+\frac{a_4'}{2f}$, $z'=z_1$, получим уравнение вида 4, где роль коэффициента b играет f.
III.2. $f=0$. Положив $d=a_4-\frac{e^2}{a}$ и сделав параллельный перенос по формулам $x'=x_1+\frac{e}{a}$, $y'=y_1$, $z'=z_1$, получим уравнение вида 5.$\Uparrow$

Теорема

Любая квадрика в пространстве является одним из следующих множеств точек:

1. эллипсоид;
2. однополостный или двуполостный гиперболоид;
3. эллиптический или гиперболический параболоид;
4. конус 2-го порядка;
5. эллиптический, гиперболический или параболический цилиндр;
6. пара пересекающихся плоскостей;
7. пара параллельных плоскостей;
8. плоскость;
9. прямая;
10. точка;
11. пустое множество.

Доказательство

$\Downarrow$Достаточно изучить геометрические образы уравнений, фигурирующих в теореме сл.25, в прямоугольной декартовой системе координат. Заметим, что уравнения 3-5 определяют цилиндры 2-го порядка; поэтому в силу теоремы сл.8 т.1-19 их геометрические образы фигурируют в пунктах 5-9 и 11 настоящей теоремы.

Уравнение $ax^2 + by^2 + cz = 0$, где $a, b, c \neq 0$, равносильно уравнению $\frac{x^2}{-\frac{c}{2a}} + \frac{y^2}{-\frac{c}{ba}} = 2z$. Положим $p = |\frac{c}{2a}|$, $q = |\frac{c}{2b}|$. Получаем уравнение $\pm\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z$, которое определяет быть может, “перевернутый” эллиптический или гиперболический параболоид.

Для уравнения $ax^2 + by^2 + cz^2 = d$, где $a, b, c \neq 0$, могут представиться следующие две возможности.

1. Числа a, b, c одного знака. Предположим, не ограничивая общности, что $a, b, c > 0$. Если $d < 0$, то геометрический образ рассматриваемого уравнения — пустое множество. Если $d = 0$, то это — точка $O(0, 0, 0)$. При $d > 0$ геометрический образ — эллипсоид $\frac{x^2}{(\frac{d}{a})} + \frac{y^2}{(\frac{d}{b})} + \frac{z^2}{(\frac{d}{c})} = 1$.

2. Числа a, b, c разных знаков. Предположим, не ограничивая общности, что $a, b > 0$, $c < 0$. Если $d = 0$, то геометрический образ рассматриваемого уравнения — конус 2-го порядка $\frac{x^2}{(\frac{1}{a})} + \frac{y^2}{(\frac{1}{b})} - \frac{z^2}{(-\frac{1}{c})} = 0$.

Если $d < 0$, то геометрический образ рассматриваемого уравнения — двуполостный гиперболоид, так как уравнение приводится к виду $\frac{x^2}{(-\frac{d}{a})} + \frac{y^2}{(-\frac{d}{b})} - \frac{z^2}{(\frac{d}{c})} = -1.$

Если $d > 0$, то геометрический образ рассматриваемого уравнения — однополостный гиперболоид, так как уравнение приводится к виду $\frac{x^2}{(\frac{d}{a})} + \frac{y^2}{(\frac{d}{b})} - \frac{z^2}{(-\frac{d}{c})} = 1.$ $\Uparrow$

Определение

Прямая ℓ называется *прямолинейной образующей* квадрики α, если $\ell \subseteq \alpha$, т.е. все точки прямой лежат на квадрике.

Рассматривая квадрики в пространстве, не состоящие целиком из точек прямых, легко понять, что эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид не имеют прямолинейных образующих.
При изучении формы однополостного гиперболоида (сл.15) и гиперболического параболоида (сл.20) выяснилось, что некоторые сечения являются парами пересекающихся прямых. Оказывается, что это не случайно.

Теорема

Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят точно две различные прямолинейные образующие.

$\Downarrow$Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на однополостном гиперболоиде $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Возьмем ненулевой вектор $\vec{a} = (p, q, r)$ и потребуем, чтобы прямая $x = x_0 + pt$, $y = y_0 + qt$, $z = z_0 + rt$ лежала на гиперболоиде. Тогда $\dfrac{(x_0 + pt)^2}{a^2} + \dfrac{(y_0 + qt)^2}{b^2} - \dfrac{(z_0 + rt)^2}{c^2} = 1$ для любого действительного числа t. Отсюда $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2} = 1$, $\dfrac{x_0 p}{a^2} + \dfrac{y_0 q}{b^2} - \dfrac{z_0 r}{c^2} = 0$, $\dfrac{p^2}{a^2} + \dfrac{q^2}{b^2} - \dfrac{r^2}{c^2} = 0$. Из последнего уравнения следует, что $r \neq 0$, поэтому без ограничения общности $r = c$. Тогда $\dfrac{p^2}{a^2} + \dfrac{q^2}{b^2} = 1$ и $\dfrac{x_0 p}{a^2} + \dfrac{y_0 q}{b^2} = \dfrac{z_0}{c}$. Положим $x_1 = x_0 - p\dfrac{z_0}{c}$, $y_1 = y_0 - q\dfrac{z_0}{c}$. Тогда $\dfrac{px_1}{a^2} + \dfrac{qy_1}{b^2} = 0$ и

$$1 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{(x_1 + p\frac{z_0}{c})^2}{a^2} + \frac{(y_1 + q\frac{z_0}{c})^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} =$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + 2\left(\frac{px_1}{a^2} + \frac{qy_1}{b^2}\right)\frac{z_0}{c} + \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - 1\right)\frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2},$$ т.е. $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$.

Следовательно, точка $M_1(x_1, y_1, 0)$ лежит на пересечении прямолинейной образующей и горлового эллипса однополостного гиперболоида. Поэтому x_1, y_1 одновременно не обращаются в нуль, и равенство $\dfrac{px_1}{a^2} + \dfrac{qy_1}{b^2} = 0$ однозначно определяет пропорцию $\dfrac{p}{q} = \dfrac{-a^2 y_1}{b^2 x_1}$. Положим $p = -\dfrac{a}{b} y_1 u$, $q = \dfrac{b}{a} x_1 u$, где u — множитель пропорциональности. Так как $\dfrac{p^2}{a^2} + \dfrac{q^2}{b^2} = (\dfrac{y_1^2}{b^2} + \dfrac{x_1^2}{a^2}) u^2$, заключаем, что $u^2 = 1$ и $u = \pm 1$.

Из равенств $x_0 = x_1 + p\dfrac{z_0}{c} = x_1 - u\dfrac{a}{b}\dfrac{z_0}{c} y_1$ и $y_0 = y_1 + q\dfrac{z_0}{c} = y_1 + u\dfrac{b}{a}\dfrac{z_0}{c} x_1$ по формулам Крамера можно выразить x_1 и y_1 через x_0, y_0. Имеем

$$\begin{cases} x_1 - u\frac{a}{b}\frac{z_0}{c} y_1 = x_0, \\ u\frac{b}{a}\frac{z_0}{c} x_1 + y_1 = y_0, \end{cases} \quad \triangle = \begin{vmatrix} 1 & -u\frac{a}{b}\frac{z_0}{c} \\ u\frac{b}{a}\frac{z_0}{c} & 1 \end{vmatrix} = 1 + u^2\frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2},$$

$\triangle_1 = x_0 + u\frac{a}{b}\frac{z_0}{c} y_0$, $\triangle_2 = y_0 - u\frac{b}{a}\frac{z_0}{c} x_0$ и $x_1 = \dfrac{x_0 + u\frac{a}{b}\frac{z_0}{c} y_0}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}$, $y_1 = \dfrac{y_0 - u\frac{b}{a}\frac{z_0}{c} x_0}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}$.

Таким образом, через точку M_0 проходят точно две различные прямолинейные образующие однополостного гиперболоида, имеющие направляющие векторы $\vec{a}_1 = (-\dfrac{a}{b} y_1, \dfrac{b}{a} x_1, c)$ и $\vec{a}_2 = (\dfrac{a}{b} y_1, -\dfrac{b}{a} x_1, c)$.⇑

Теорема

Через каждую точку гиперболического параболоида проходят точно две различные прямолинейные образующие.

$\Downarrow$Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на гиперболическом параболоиде $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$. Возьмем ненулевой вектор $\vec{a} = (s, m, n)$ и потребуем, чтобы прямая $x = x_0 + st$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ лежала на параболоиде. Тогда $\frac{(x_0 + st)^2}{p} - \frac{(y_0 + mt)^2}{q} = 2(z_0 + nt)$ для любого действительного числа t. Отсюда $\frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} = 2z_0$, $\frac{x_0 s}{p} - \frac{y_0 m}{q} = n$, $\frac{s^2}{p} - \frac{m^2}{q} = 0$. Из последнего равенства следует $\frac{s}{\sqrt{p}} - \frac{m}{\sqrt{q}} = 0$ или $\frac{s}{\sqrt{p}} + \frac{m}{\sqrt{q}} = 0$. Так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, числа s, m одновременно не обращаются в нуль. Поэтому можно взять $s_1 = \sqrt{p}$, $m_1 = \sqrt{q}$ или $s_2 = \sqrt{p}$, $m_2 = -\sqrt{q}$. Тогда $n_1 = \frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}$, $n_2 = \frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}$. Таким образом, через точку M_0 проходят точно две различные прямолинейные образующие гиперболического параболоида, имеющие направляющие векторы $\vec{a}_1 = (s_1, m_1, n_1)$ и $\vec{a}_2 = (s_2, m_2, n_2)$.$\Uparrow$

Задача

Дан гиперболический параболоид $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 2z$. Через его образующую $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{0}$ и точку $(1, 1, 1)$ проведена плоскость π. Найти параметрические уравнения второй прямой линии пересечения параболоида с плоскостью π.

Решение. Запишем уравнение плоскости π по двум точкам и вектору (см. формулу (5) сл.8 т.1-16): $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Отсюда $\pi : -3x + 4y - z = 0$.

Найдем общие точки этой плоскости и параболоида. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} 3x - 4y + z = 0, \\ \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 2z. \end{cases}$ Выразим z из уравнения плоскости $z = -3x + 4y = 12(-\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3})$, представим уравнение гиперболического параболоида в виде $\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3}\right)\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3}\right) = 2z$ и подставим вместо z его выражение: $\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3}\right)\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3}\right) = 24(-\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3})$.

Так как $(-\frac{x}{4}+\frac{y}{3})\neq 0$, после сокращения получаем $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=-24$.
Следовательно, вторая прямая линия пересечения параболоида с плоскостью π имеет общие уравнения $\begin{cases} 3x-4y+z=0, \\ 3x+4y+288=0. \end{cases}$ Выразив из этой системы x и y через z, получим $x=-48-\frac{z}{6}$, $y=-36+\frac{z}{8}$. Положив $z=24t$, имеем $x=-48-4t$, $y=-36+3t$.
Ответ: параметрические уравнения второй прямой линии пересечения параболоида с плоскостью π $x=-48-4t$, $y=-36+3t$, $z=24t$.

Задача

Найти острый угол между прямыми, по которым плоскость $\pi : 3x + 4y + 5z = 0$ пересекает конус $\alpha : x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$.

Решение. Пусть $\vec{n} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}(3, 4, 5)$ — нормальный орт плоскости π.

Положим $\vec{e}_1 = \dfrac{1}{5}(-4, 3, 0)$ и $\vec{e}_2 = [\vec{n}, \vec{e}_1]$. Тогда $\vec{e}_2 = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}(-3, -4, 5)$ и $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n})$ — правый ортонормированный базис, причем векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ компланарны плоскости π. Запишем параметрические уравнения плоскости π с начальной точкой $O(0, 0, 0)$ и направляющими векторами

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2\colon \begin{cases} x = -\dfrac{4}{5}u - \dfrac{3}{5\sqrt{2}}v, \\ y = \dfrac{3}{5}u - \dfrac{4}{5\sqrt{2}}v, \\ z = \dfrac{v}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Уравнение пересечения конуса и плоскости в плоскостных координатах: $\left(\dfrac{4}{5}u + \dfrac{3}{5\sqrt{2}}v\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}u - \dfrac{4}{5\sqrt{2}}v\right)^2 - v^2 = 0$ или $u^2 - \dfrac{v^2}{2} = 0$. Получаются прямые $u\sqrt{2} \pm v = 0$. Их нормальные векторы $(\sqrt{2}, \pm 1)$ и угол между ними равен $\arccos \frac{1}{3}$.