Тема 1-2: Элементы комбинаторики

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Определение

Мощностью конечного множества называется количество элементов этого множества.

Мощность множества M обозначается через $|M|$. По определению $|\emptyset| = 0$.
Пусть X, Y — конечные множества. Если $X \cap Y = \emptyset$, то ясно, что $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.
В общем случае $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$, так как при подсчете элементов в $|X \cup Y|$ элементы из $|X \cap Y|$ считаются дважды.
Очевидно также, что $|X \setminus Y| = |X| - |X \cap Y|$.

Определение

Предположим, что каждому элементу множества X сопоставлен элемент множества Y, так что различным элементам сопоставляются различные и все элементы множества Y при этом получаются. Таким образом, каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y. Такое отображение называется *биекцией* множества X на Y.

Наблюдение

Если между конечными множествами существует биекция, то их мощности равны.

Мощность декартова произведения двух множеств

Теорема

Пусть X, Y — конечные множества. Тогда $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

$\Downarrow$ Пусть $x_1, \dots, x_n$ — все различные элементы множества X и $y_1, \dots, y_k$ — все различные элементы множества Y. Расположим элементы декартова произведения $X \times Y$ в виде таблицы

$$\begin{array}{cccc} (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \dots & (x_1, y_k) \\ (x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \dots & (x_2, y_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n, y_1) & (x_n, y_2) & \dots & (x_n, y_k) \end{array}$$

Все элементы в одной строке этой таблицы различны, так как у них различны первые элементы, и все элементы в одном столбце также различны, так как у них различны вторые элементы. Следовательно, все элементы в таблице различны. Ясно, что эта таблица содержит все элементы из множества $X \times Y$.

Следовательно, $|X \times Y|$ равна числу элементов в таблице. Так как таблица прямоугольная, имеет n строк и k столбцов, ясно, что в ней nk элементов. Это завершает доказательство.$\Uparrow$

Теорема

Пусть $X_1, \ldots, X_n$*— конечные множества. Тогда* $|X_1 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot \cdots \cdot |X_n|$.

$\Downarrow$ Используем индукцию по n. При $n = 2$ требуемое следует из теоремы сл.3.
Пусть утверждение уже доказано для всех $2 \leq k < n$. Сопоставим кортежу $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ упорядоченную пару $((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$, состоящую из кортежа $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и элемента x_n.
Получаем отображение множества $Y_1 = X_1 \times \ldots \times X_{n-1} \times X_n$ в множество $Y_2 = (X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$, которое различные элементы переводит в различные и все элементы множества Y_2 при этом получаются.
Это отображение является биекцией множества Y_1 на Y_2. Следовательно, $|Y_1| = |Y_2|$.
Используя предположение индукции $|X_1 \times \ldots \times X_{n-1}| = |X_1| \cdot \cdots \cdot |X_{n-1}|$, получаем требуемое утверждение.$\Uparrow$

Определение декартовой степени множества см. на сл.17 т.1.
Из теоремы сл.4 непосредственно получается следующее утверждение.

Следствие

Пусть X – конечное множество, n – натуральное число. Тогда $|X^n| = |X|^n$.

Например, $|\{0,1\}^n| = 2^n$, т.е. количество всевозможных последовательностей из нулей и единиц, содержащих n символов, равно 2^n.

Определение

Булеаном множества X называется множество всех подмножеств множества X, включая его само и пустое множество.

Булеан множества X обозначим через $\mathcal{B}(X)$. (В задачнике используется другое обозначение $\mathcal{P}(X)$).

Теорема

Пусть X – конечное множество. Тогда $|\mathcal{B}(X)| = 2^{|X|}$.

$\Downarrow$ Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, и $|X| = k$. Пусть $Y \subseteq X$. Для $j = 1, \ldots, k$ положим $i_Y(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \in Y, \\ 0, & \text{если } x_j \notin Y. \end{cases}$

Определим отображение φ из множества $\mathcal{B}(X)$ в множество $\{0,1\}^k$, полагая $\varphi(Y) = (i_Y(1), \ldots, i_Y(k))$ для любого $Y \in \mathcal{B}(X)$.

Если $Y_1 \neq Y_2$, то для некоторого j имеем $x_j \in Y_1 \setminus Y_2$, откуда $i_{Y_1}(j) = 1$, $i_{Y_2}(j) = 0$ и потому $\varphi(Y_1) \neq \varphi(Y_2)$.

Очевидно, что каждая строка $(i_1, \ldots, i_k)$ из множества $\{0,1\}^k$ получается из подмножества $\{x_j | i_j = 1\}$ множества X.

Следовательно, построена биекция множества $\mathcal{B}(X)$ на $\{0,1\}^k$. Требуемое утверждение теперь следует из следствия сл.5.$\Uparrow$

Пусть X – конечное множество из n элементов, где $n \geq 1$.

Определение

Размещением из n элементов по k элементов называется любой кортеж из множества X^k, состоящий из различных элементов.

Количество размещений из n элементов по k элементов обозначается через A_n^k.

Чтобы сосчитать размещения из n по k элементов, заметим, что первый элемент размещения можно выбрать n способами. Если первый элемент зафиксирован, то второй можно выбрать $n-1$ способом. Таким образом, первые два элемента можно выбрать $n(n-1)$ способами. Если первые два элемента зафиксированы, то третий можно выбрать $n-2$ способами. Поэтому первые три элемента можно выбрать $n(n-1)(n-2)$ способами. Продолжая рассуждать таким образом, получаем формулу

$$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Вспоминая определение факториала (сл.8 т.1), можно переписать полученную формулу так:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Определение

Перестановкой из n элементов называется размещение n элементов по n элементов.

Количество перестановок из n элементов обозначается через P_n. По определению имеем $P_n = A_n^n$. С помощью формулы для вычисления A_n^k сл.7 получаем формулу для вычисления P_n:

$$P_n = n!.$$

Пусть X – конечное множество из n элементов, где $n \geq 1$.

Определение

Сочетанием из n элементов по k элементов называется любое подмножество множества X, содержащее k элементов.

Количество сочетаний из n элементов по k элементов обозначается через C_n^k.
Докажем, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Для этого заметим, что из каждого сочетания, переставляя произвольным образом его элементы, можно получить P_k различных перестановок.
При этом множества перестановок, полученных из различных сочетаний, имеют пустое пересечение.
Так как каждое размещение получается из некоторого сочетания, легко понять, что $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$. Вспоминая формулы для A_n^k (сл.7) и P_k (сл.8), получаем требуемую формулу.
Полезно запомнить, что

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \; C_n^1 = C_n^{n-1} = n, \; C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Справедливы следующие равенства:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$;
2. $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$;
3. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Первое свойство непосредственно получается из формулы сл.9.
Третье свойство следует из теоремы сл.6 с учетом того, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ равно числу всех подмножеств множества из n элементов, расписанному как сумма количеств k-элементных подмножеств при $k = 0, 1, \ldots, n$.
Докажем второе свойство путем непосредственного вычисления:

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\,\frac{k+n-k+1}{k(n-k+1)} =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(k-1)!k(n-k)!(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k.$$

Расположим числа C_n^k в виде треугольника:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Используя свойство 2 сл.10 и формулы для C_n^0 и C_n^n сл.9, получаем *треугольник Паскаля*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(x+y)^0 \\
x+y \\
x^2+2xy+y^2 \\
x^3+3x^2y+3xy^2+y^3
\end{array}
$$

Рассмотрим $(x+y)^n$ при $n=1$, $n=2$, $n=3$: $(x+y)^1 = x+y$, $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.
Сравнивая коэффициенты при x^iy^j в правой части каждого равенства с соответствующей строкой треугольника Паскаля, приходим к формуле

Бином Ньютона

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1x^{n-1}y + C_n^2x^{n-2}y^2 + \ldots + C_n^kx^{n-k}y^k + \ldots + C_n^{n-1}xy^{n-1} + y^n.$$

Докажем эту формулу по индукции. База индукции установлена. Предположим, что формула имеет место при всех $0 < k \le n$. Вычислим с использованием свойства 2 сл.10:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) = \\
&= (x^n + C_n^1x^{n-1}y + C_n^2x^{n-2}y^2 + \ldots + C_n^kx^{n-k}y^k + \ldots + C_n^{n-1}xy^{n-1} + y^n)(x+y) = \\
&= x^{n+1} + C_n^1x^ny + C_n^2x^{n-1}y^2 + \ldots + C_n^kx^{n-k+1}y^k + \ldots + C_n^{n-1}x^2y^{n-1} + xy^n + \\
&+ x^ny + C_n^1x^{n-1}y^2 + C_n^2x^{n-2}y^3 + \ldots + C_n^kx^{n-k}y^{k+1} + \ldots + C_n^{n-1}xy^n + y^{n+1} = \\
&= x^{n+1} + (C_n^1+1)x^ny + (C_n^2+C_n^1)x^{n-1}y^2 + \ldots + (C_n^k+C_n^{k-1})x^{n-k+1}y^k + \\
&+ (1+C_n^{n-1})xy^n + y^{n+1} = \\
& x^{n+1} + C_{n+1}^1x^ny + C_{n+1}^2x^{n-1}y^2 + \ldots + C_{n+1}^kx^{n-k+1}y^k + \ldots + C_{n+1}^1xy^n + y^{n+1},
\end{aligned}$$

что и требуется доказать.

Следствия биномиальной формулы

Расписывая по биномиальной формуле $(1+1)^n$, получаем еще одно доказательство свойства 3 сл.10.

Расписывая по биномиальной формуле $(1-1)^n$, получаем $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n$, откуда

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2m} + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{2m+1} + \ldots$$

Здесь левая и правая часть содержат конечное число слагаемых, причем в левой части записаны все слагаемые вида C_n^{2m}, где $0 \le 2m \le n$, а в правой части – все слагаемые вида C_n^{2m+1}, где $1 \le 2m+1 \le n$.