Тема 1-19: Классификация квадрик на плоскости

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Определение квадрики на плоскости (сл.2 т.1-18) включает некоторую аффинную систему координат. Корректность этого определения состоит в том, что оно не зависит от выбора этой системы координат.

Предложение

В любой аффинной системе координат на плоскости уравнение квадрики является алгебраическим уравнением второй степени.

$\Downarrow$Уравнение (1) сл.2 т.1-18 запишем в матричном виде:

$$X^\top \cdot A \cdot X + 2B \cdot X + a_3 = 0, \qquad (1)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \neq O$, $B = (a_1, a_2)$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. При изменении системы координат новые координаты точки обозначим $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Запишем формулы преобразования координат (см. сл.30,31 т.1-12) в матричном виде:

$$X = C + T \cdot X_1, \qquad (2)$$

где $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ — матрица перехода, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ — столбец координат нового начала координат.

Окончание проверки корректности

Подставим выражение для X из (2) в левую часть уравнения (1) и выполним преобразования, приняв во внимание, что $(T \cdot X_1)^\top = X_1^\top \cdot T^\top$, $A^\top = A$ и $X_1^\top \cdot T^\top \cdot A \cdot C$ — матрица размеров 1×1, поэтому $X_1^\top \cdot T^\top \cdot A \cdot C = (X_1^\top \cdot T^\top \cdot A \cdot C)^\top = C^\top \cdot A^\top \cdot T \cdot X_1 = C^\top \cdot A \cdot T \cdot X_1$: $X^\top \cdot A \cdot X + 2B \cdot X + a_3 = (C + T \cdot X_1)^\top \cdot A \cdot (C + T \cdot X_1) + 2B \cdot (C + T \cdot X_1) + a_3 = C^\top \cdot A \cdot C + (T \cdot X_1)^\top \cdot A \cdot C + C^\top \cdot A \cdot T \cdot X_1 + (T \cdot X_1)^\top \cdot A \cdot T \cdot X_1 + 2B \cdot C + 2B \cdot T \cdot X_1 + a_3 = X_1^\top \cdot T^\top \cdot A \cdot T \cdot X_1 + X_1^\top \cdot T^\top \cdot A \cdot C + C^\top \cdot A \cdot T \cdot X_1 + 2B \cdot T \cdot X_1 + C^\top \cdot A \cdot C + 2B \cdot C + a_3 = X_1^\top \cdot (T^\top \cdot A \cdot T) \cdot X_1 + 2C^\top \cdot A \cdot T \cdot X_1 + 2B \cdot T \cdot X_1 + C^\top \cdot A \cdot C + 2B \cdot C + a_3 = X_1^\top \cdot A_1 \cdot X_1 + 2B_1 \cdot X_1 + a_3'$. Здесь $A_1 = T^\top \cdot A \cdot T$, $B_1 = (C^\top \cdot A + B)$ и $a_3' = C^\top \cdot A \cdot C + 2B \cdot C + a_3$. Таким образом, при изменении системы координат уравнение (1) превращается в уравнение

$$X_1^\top \cdot A_1 \cdot X + 2B_1 \cdot X_1 + a_3' = 0. \tag{3}$$

Остается проверить, что $A_1 \neq O$. Так как матрица перехода T обратима, из равенства $A_1 = T^\top \cdot A \cdot T$ получаем $A = (T^\top)^{-1} \cdot A_1 \cdot T^{-1}$. Из условия $A \neq O$ следует $A_1 \neq O$.$\Uparrow$

Замечание

В дальнейшем изложении этой темы предполагается, что общее уравнение квадрики на плоскости задано в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Теорема

С помощью преобразования прямоугольной декартовой системы координат (поворота и параллельного переноса) общее уравнение квадрики на плоскости $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_3 = 0$ может приведено к одному из следующих видов:

1. $ax'^2 + by'^2 + c = 0,\ a, b \neq 0$;
2. $ax'^2 + by' = 0$ или $ax' + by'^2 = 0,\ a, b \neq 0$;
3. $ax'^2 + c = 0$ или $by'^2 + c = 0,\ a, b \neq 0$.

$\Downarrow$Предположим, что $a_{12} \neq 0$ и докажем, что за счет поворота системы координат на подходящий угол в уравнении квадрики коэффициент при произведении переменных может обратиться в нуль. Для этого подставим в выражение $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ выражения x, y из формул сл.32 т.1-12 $\begin{cases} x = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi, \\ y = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi. \end{cases}$ Имеем $a_{11}(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)^2 + 2a_{12}(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi) + a_{22}(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi)^2 =$
$a_{11}(x_1^2\cos^2\varphi - 2x_1y_1\cos\varphi\sin\varphi + y_1^2\sin^2\varphi) + 2a_{12}((x_1^2 - y_1^2)\sin\varphi\cos\varphi + x_1y_1(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)) + a_{22}(x_1^2\sin^2\varphi + 2x_1y_1\sin\varphi\cos\varphi + y_1^2\cos^2\varphi) =$
$(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)x_1^2 + (2(a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cos\varphi + 2a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi))x_1y_1 + (a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi)y_1^2.$

Напомним, что $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ и $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$. С учетом этого положим $a = a_{11}\cos^2\varphi + a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi$,
$b = a_{11}\sin^2\varphi - a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\cos^2\varphi$, $d = (a_{22} - a_{11})\sin 2\varphi + 2a_{12}\cos 2\varphi$.
Тогда $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = ax_1^2 + dx_1y_1 + by_1^2$.
Выберем φ так, чтобы выполнялось условие $d = 0$. Тогда

$$2a_{12}\cos 2\varphi = (a_{11} - a_{22})\sin 2\varphi. \tag{4}$$

Предположим, что условие (4) выполнено. Поскольку $a_{12} \neq 0$, также и $\sin 2\varphi \neq 0$, потому что иначе $\cos 2\varphi = 0$, что невозможно. Разделив обе части равенства (4) на $a_{12}\sin 2\varphi$, получим требуемое условие для φ:

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \tag{5}$$

После поворота системы координат на угол φ, удовлетворяющий (5), общее уравнение квадрики принимает вид $ax_1^2 + by_1^2 + 2fx_1 + 2gy_1 + h = 0$. При этом по крайней мере один из коэффициентов a, b отличен от нуля. Рассмотрим имеющиеся возможности.
I. $a, b \neq 0$. Выделим полные квадраты в левой части уравнения:
$ax_1^2 + by_1^2 + 2fx_1 + 2gy_1 + h = a(x_1 + \frac{f}{a})^2 - \frac{f^2}{a} + b(y_1 + \frac{g}{b})^2 - \frac{g^2}{b} + h = ax'^2 + by'^2 + c$,
где $x' = x_1 + \frac{f}{a}$, $y' = y_1 + \frac{g}{b}$, $c = h - \frac{f^2}{a} - \frac{g^2}{b}$. Сделав параллельный перенос системы координат Ox_1y_1 в точку $O_1(-\frac{f}{a}, -\frac{g}{b})$, приведем уравнение квадрики к виду 1.

Окончание доказательства теоремы

II. $a \neq 0, b = 0$ или $a = 0, b \neq 0$. Эти ситуации похожи, и для определенности рассмотрим первую из них. Вторая рассматривается аналогично.
Уравнение квадрики принимает вид $ax_1^2 + 2fx_1 + 2gy_1 + h = 0$. Выделим полный квадрат в левой части уравнения:
$ax_1^2 + 2fx_1 + 2gy_1 + h = a(x_1 + \frac{f}{a})^2 - \frac{f^2}{a} + 2gy_1 + h$. Положим $x' = x_1 + \frac{f}{a}$, $c = h - \frac{f^2}{a}$. Уравнение квадрики принимает вид $ax'^2 + 2gy_1 + c = 0$. Здесь также возникает две возможности.
II.1. $g \neq 0$. Тогда имеем $ax'^2 + 2gy_1 + h' = ax'^2 + 2g(y_1 + \frac{c}{2g})$. Положим $y' = y_1 + \frac{c}{2g}$ и $b = 2g$. Уравнение примет вид 2. При этом делается параллельный перенос начала координат в точку $O_1(-\frac{f}{a}, -\frac{c}{2g})$.
II.2. $g = 0$. Тогда имеем $ax'^2 + c = 0$. Уравнение имеет вид 3. При этом делается параллельный перенос начала координат в точку $O_1(-\frac{f}{a}, 0)$.$\Uparrow$

При решении конкретной задачи о преобразовании уравнения квадрики на плоскости к каноническому виду приходится находить формулы преобразования координат $\begin{cases} x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \\ y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi, \end{cases}$ зная значение $\operatorname{ctg} 2\varphi$. Для нахождения $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ сначала находят $\operatorname{tg}\varphi$, используя формулу $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{2\operatorname{tg}\varphi}$, а затем $\cos\varphi$ с помощью формулы $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$. По значениям $\cos\varphi$ и $\operatorname{tg}\varphi$ легко находится $\sin\varphi$. Квадратное уравнение для $\operatorname{tg}\varphi$ всегда имеет два решения, произведение которых равно -1. Это означает, что имеется два взаимно перпендикулярных направления новой оси Ox_1. Рекомендуется брать положительное значение $\operatorname{tg}\varphi$ и находить по нему положительные значения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Таким образом, поворот будет осуществляться в первую четверть исходной системы координат.

Теорема

Любая квадрика на плоскости является одним из следующих множеств точек:

1. эллипс;
2. гипербола;
3. парабола;
4. пара пересекающихся прямых;
5. пара параллельных прямых;
6. прямая;
7. точка;
8. пустое множество.

$\Downarrow$В силу теоремы сл.4 достаточно определить геометрические образы уравнений, фигурирующие в этой теореме.
Рассмотрим уравнение $ax^2 + by^2 + c = 0$, где $a, b \neq 0$. Здесь возможны два случая.

I.1. $ab > 0$, т.е. числа a, b одного знака. Без ограничения общности предположим, что $a > 0$, $b > 0$. В зависимости от значения c рассмотрим следующие возможности.
I.1.1. $c > 0$. В этом случае геометрический образ — пустое множество, так как $ax^2 + by^2 + c \geq c$.
I.1.2. $c = 0$. В этом случае геометрический образ — точка $O(0, 0)$, так как $ax^2 + by^2 = 0$.
I.1.3. $c < 0$. В этом случае уравнение $ax^2 + by^2 + c = 0$ равносильно уравнению $\frac{x^2}{-c/a} + \frac{y^2}{-c/b} = 1$. Так как $-c/a, -c/b > 0$, геометрический образ — эллипс.
I.2. $ab < 0$, т.е. числа a, b разных знаков. Без ограничения общности предположим, что $a > 0$, $b < 0$. В зависимости от значения c рассмотрим следующие возможности.
I.2.1. $c = 0$. В этом случае уравнение $ax^2 + by^2 = 0$ равносильно уравнению $(\sqrt{a}x - \sqrt{-b}y)(\sqrt{a}x + \sqrt{-b}y) = 0$, которое равносильно совокупности уравнений $\sqrt{a}x - \sqrt{-b}y = 0$, $\sqrt{a}x + \sqrt{-b}y = 0$. Геометрический образ — пара пересекающихся прямых.
I.2.2. $c \neq 0$. В этом случае уравнение $ax^2 + by^2 + c = 0$ равносильно уравнению $\frac{x^2}{-c/a} + \frac{y^2}{-c/b} = 1$. Так как $-c/a, -c/b$ — числа разных знаков, геометрический образ — гипербола.

Рассмотрим уравнение $ax^2 + by = 0$, где $a, b \neq 0$. Оно равносильно уравнению $y = -\frac{a}{b}x^2$. Геометрический образ — парабола. Аналогично уравнение $ax + by^2 = 0$, где $a, b \neq 0$, равносильно уравнению $y^2 = -\frac{a}{b}x$, и определяет параболу.
Рассмотрим уравнение $ax^2 + c = 0$, где $a \neq 0$. В зависимости от значения c рассмотрим следующие возможности.
III.1. $c > 0$. В этом случае геометрический образ — пустое множество, так как $ax^2 + c \geq c$.
III.2. $c = 0$. В этом случае геометрический образ — прямая, так как уравнение $ax^2 = 0$ равносильно уравнению $x = 0$.
III.3. $c < 0$. В этом случае уравнение $ax^2 + c = 0$ равносильно уравнению $x^2 = -\frac{c}{a}$, которое в свою очередь равносильно совокупности уравнений $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Геометрический образ — пара параллельных прямых.
Аналогично рассматриваются возможные геометрические образы уравнения $by^2 + c = 0$, $b \neq 0$.$\Uparrow$

Пример

Определить вид квадрики $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$, найти каноническое уравнение и изобразить на чертеже расположение квадрики (относительно исходной системы координат).

Находим $\operatorname{ctg} 2\varphi$ по формуле (5), получаем $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Положим $t = \operatorname{tg}\varphi$, тогда $\frac{1-t^2}{2t} = \frac{4}{3}$, откуда $3t^2 + 8t - 3 = 0$ и $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = -3$. Полагаем $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}$. Находим $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{10}{9}$, откуда $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Следовательно, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Записываем формулы преобразования координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x_1 - y_1), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x_1 + 3y_1). \end{cases} \qquad (6)$$

Вычисляем

$$7x^2 + 6xy - y^2 = \frac{7}{10}(3x_1 - y_1)^2 + \frac{6}{10}(3x_1 - y_1)(x_1 + 3y_1) - \frac{1}{10}(x_1 + 3y_1)^2 =$$
$$\frac{7}{10}(9x_1^2 - 6x_1y_1 + y_1^2) + \frac{6}{10}(3x_1^2 - 3y_1^2 + 8x_1y_1) - \frac{1}{10}(x_1^2 + 6x_1y_1 + 9y_1^2) = 8x_1^2 - 2y_1^2.$$

Уравнение квадрики после поворота системы координат принимает вид $8x_1^2 - 2y_1^2 + \frac{96}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{8}{\sqrt{10}}y_1 + 28 = 0$. После выделения полных квадратов получаем $8(x_1 + \frac{6}{\sqrt{10}})^2 - 2(y_1 - \frac{2}{\sqrt{10}})^2 = 0$. Положим

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \dfrac{6}{\sqrt{10}}, \\ y_2 = y_1 - \dfrac{2}{\sqrt{10}}. \end{cases} \tag{7}$$

Тогда, сократив на 2, получаем $4x_2^2 - y_2^2 = 0$. Это каноническое уравнение квадрики, которая является парой пересекающихся прямых $y_2 = \pm 2x_2$. Система координат Ox_1y_1 получается из исходной системы координат Oxy поворотом против часовой стрелки на угол $\operatorname{arctg}(\frac{1}{3})$. Система координат $O_1x_2y_2$ получается из системы координат Ox_1y_1 параллельным переносом: новое начало координат помещается в точку O_1 с координатами $x_1 = -\frac{6}{\sqrt{10}}$, $y_1 = \frac{2}{\sqrt{10}}$. В системе координат Oxy координаты точки O_1 удобно вычислить по формулам (6) через ее координаты в системе Ox_1y_1: $x = 2$, $y = 0$.

Для удобства построения графика найдем уравнения прямых $y_2 = \pm 2x_2$ в системе координат Oxy. Для этого нужно выразить x_2, y_2 через x, y. Учитывая (7), выразим x_1, y_1 через x, y. Для этого запишем уравнения (6) в матричном виде: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Легко проверить, что матрица $T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ обратимая и $T^{-1} = T^{\top}$, поэтому $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Таким образом, $x_1 = \frac{3x + y}{\sqrt{10}}$, $y_1 = \frac{-x + 3y}{\sqrt{10}}$ и из (7) $x_2 = \frac{3x + y + 6}{\sqrt{10}}$, $y_2 = \frac{-x + 3y - 2}{\sqrt{10}}$.
Следовательно, в системе координат Oxy прямая $y_2 = 2x_2$ имеет уравнение $7x - y + 14 = 0$, а прямая $y_2 = -2x_2$ — уравнение $x + y + 2 = 0$.

Полученные уравнения показывают, что выражение в левой части исходного уравнения квадрики раскладывается в произведение:
$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = (7x - y + 14)(x + y + 2)$.
Способ решения этого примера позволяет раскладывать на множители многочлен второй степени от двух неизвестных в случае, когда это возможно.
Чертеж см. на рис. 1 на следующем слайде.

Чертеж к примеру

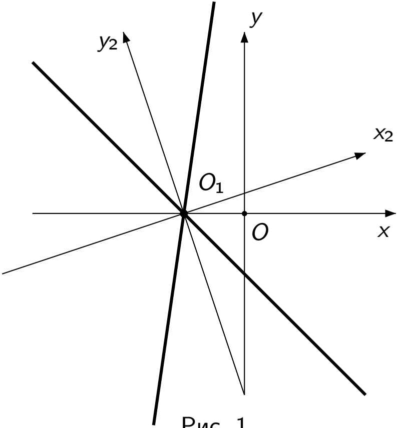

Рис. 1