Тема 1-18: Эллипс, гипербола, парабола

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Определение

Алгебраическим уравнением второй степени с двумя неизвестными называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_3 = 0, \tag{1}$$

где по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля.

Определение

Квадрикой на плоскости называется геометрический образ алгебраического уравнения второй степени с двумя неизвестными относительно фиксированной аффинной системы координат.

Корректность этого определения будет проверена в начале следующей темы.

Нашей целью изучения квадрик является их полная классификация. Для ее осуществления требуется сначала изучить некоторые конкретные квадрики на плоскости. Этому и посвящена настоящая тема.

Определение

Эллипсом называется геометрический образ уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

в прямоугольной декартовой системе координат.
Указанная система координат называется *канонической*, и уравнение (2) называется *каноническим*.

При $a = b$ эллипс превращается в окружность. В дальнейших рассмотрениях предполагается, что $a > b > 0$. Так как в уравнение (2) входят только квадраты переменных, эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат. Поэтому для выяснения формы эллипса достаточно изучить ее в первом квадранте. Выразим y через x предполагая, что $x, y \geq 0$: $y(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Ясно, что $0 \leq x \leq a$, функция $y(x)$ убывает и выпукла вверх (предлагается убедиться, что $y''(x) < 0$).
Вид эллипса показан на рис. 1.

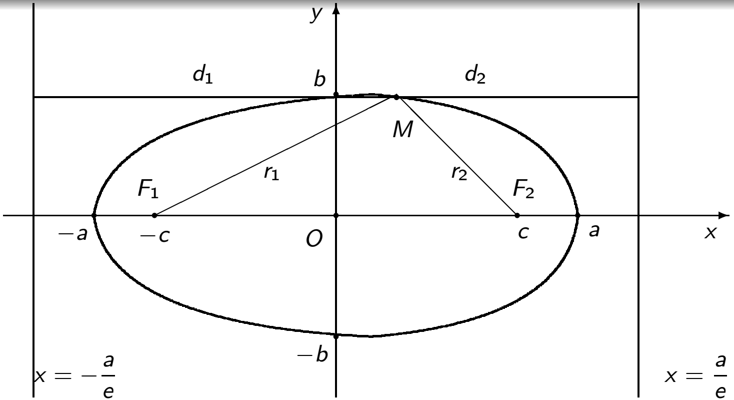


Рис. 1

Определения

Числа a и b называются *большой* и *малой полуосями* эллипса. Положим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ называются *фокусами* эллипса, число $e = \frac{c}{a}$ — его *эксцентриситетом*, прямые с уравнениями $x = -\frac{a}{e}$, $x = \frac{a}{e}$ — *директрисами* эллипса. Отрезки, соединяющие точку на эллипсе с его фокусами, называются *фокальными радиусами* этой точки.

Теорема

Произвольная точка M плоскости лежит на эллипсе, заданном уравнением (2), тогда и только тогда, когда сумма расстояний $|F_1M| + |F_2M|$ от точки M до фокусов эллипса есть постоянная величина, равная $2a$.

$\Downarrow$Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на эллипсе, заданном уравнением (2). Вычислим $r_1 = |F_1M_0| = \sqrt{(x_0+c)^2 + y_0^2}$. Имеем $y_0^2 = b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2}$, откуда $r_1^2 = (x_0+c)^2 + y_0^2 = x_0^2 + 2x_0c + c^2 + b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2} = x_0^2(1 - \frac{b^2}{a^2}) + 2x_0c + a^2 = \frac{c^2x_0^2}{a^2} + 2x_0c + a^2 = (ex_0 + a)^2$ (мы пользуемся равенством $a^2 = b^2 + c^2$). Таким образом, $r_1 = a + ex_0$, поскольку $|x_0| \le a$ и $e < 1$. Аналогично легко вычислить, что $r_2^2 = (x_0 - c)^2 + y_0^2 = (ex_0 - a)^2$ и $r_2 = a - ex_0$. Таким образом, $r_1 + r_2 = 2a$. Мы видим, что для любой точки $M_0(x_0, y_0)$ на эллипсе справедливы формулы

$$r_1 = a + ex_0, \quad r_2 = a - ex_0. \tag{3}$$

Предположим, что $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, для которой $|F_1M| + |F_2M| = 2a$. Тогда $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Отсюда $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Возведя это равенство в квадрат и выполнив преобразования с учетом равенства $a^2 = b^2 + c^2$, придем к уравнению (2).$\Uparrow$

Директориальное свойство эллипса

Обозначим для точки плоскости через d_i расстояние от этой точки до директрисы эллипса, ближайшей к фокусу F_i $(i = 1, 2)$.

Теорема

Произвольная точка M плоскости лежит на эллипсе, заданном уравнением (2), тогда и только тогда, когда $e = \dfrac{r_1}{d_1}$ $[e = \dfrac{r_2}{d_2}]$.

$\Downarrow$Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на эллипсе, заданном уравнением (2). Тогда ясно, что $d_1 = |\dfrac{a}{e} + x_0|$, $d_2 = |\dfrac{a}{e} - x_0|$ и легкие вычисления с использованием формул (3) показывают, что $e = \dfrac{r_1}{d_1}$ и $e = \dfrac{r_2}{d_2}$.
Предположим, что $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, для которой $e = \dfrac{r_1}{d_1}$. Учитывая, что $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $d_1 = |\dfrac{a}{e} + x|$, из равенства $r_1 = ed_1$ получаем $(x+c)^2 + y^2 = e^2(\dfrac{a}{e} + x)^2 = (a + ex)^2$. Из равенства $(x+c)^2 + y^2 = (a + ex)^2$, используя преобразования и равенства $e = \dfrac{c}{a}$, $a^2 = b^2 + c^2$, получаем уравнение (2).$\Uparrow$

Используя фокальное свойство эллипса, можно дать такое

Определение 1

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек этой плоскости есть постоянная величина.

Используя директориальное свойство эллипса, приходим к следующему определению.

Определение 2

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых отношение расстояния до фиксированной точки этой плоскости к расстоянию до фиксированной прямой, не содержащей эту точку, есть постоянная величина, меньшая единицы.

Предложение

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на эллипсе, заданном уравнением (2). Тогда касательная к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет уравнение

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \tag{4}$$

$\Downarrow$Запишем уравнение касательной в виде $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Чтобы найти $y'(x_0)$, продифференцируем равенство (2) по x, считая y функцией от x: $2\dfrac{x}{a^2} + 2\dfrac{y \cdot y'(x)}{b^2} = 0$. В точке x_0 получаем $\dfrac{x_0}{a^2} + \dfrac{y_0 \cdot y'(x_0)}{b^2} = 0$, откуда $y'(x_0) = -\dfrac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$. Таким образом, $y - y_0 = -\dfrac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$. Умножив обе части последнего равенства на $\dfrac{y_0}{b^2}$, выполнив преобразования и используя равенство $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$ (так как точка M_0 лежит на эллипсе), придем к уравнению (4).$\Uparrow$

Предложение

Если покрыть эллипс изнутри отражающим свет слоем и поместить в один из фокусов источник света, то отраженные от эллипса лучи света соберутся в другом фокусе.

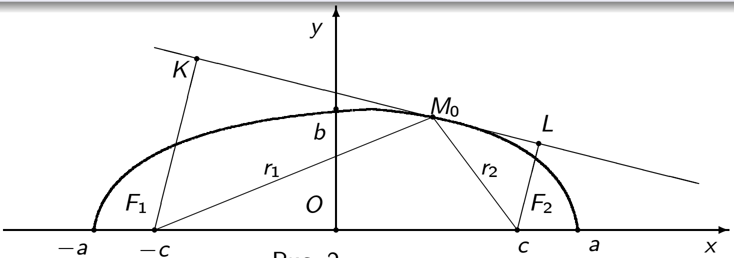


Рис. 2

⇓Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0)$ на эллипсе и проведем в этой точке касательную к эллипсу (см. рис. 2). Ее уравнение $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$. Опустим из точек F_1 и F_2 перпендикуляры на касательную. Для доказательства достаточно убедиться, что $\angle F_1 M_0 K = \angle F_2 M_0 L$. С этой целью докажем, что $\triangle F_1 M_0 K$ и $\triangle F_2 M_0 L$ подобны. Так как эти треугольники прямоугольные, достаточно проверить, что $\frac{|F_1 K|}{|F_2 L|} = \frac{r_1}{r_2}$.

Так как $|F_1K|$ и $|F_1L|$ — расстояния от точек F_1 и F_2 до касательной, используя предложение сл.26 т.1-15, имеем

$$|F_1K| = \frac{|\frac{-x_0c}{a^2} - 1|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{|x_0c + a^2|}{a^2\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} \text{ и } |F_1L| = \frac{|\frac{x_0c}{a^2} - 1|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{|x_0c - a^2|}{a^2\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Так как $e = \frac{c}{a}$, с учетом формулы (3) сл. 5 отсюда получаем

$$\frac{|F_1K|}{|F_1L|} = \frac{|x_0c + a^2|}{|x_0c - a^2|} = \frac{|x_0e + a|}{|x_0e - a|} = \frac{a + x_0e}{a - x_0e} = \frac{r_1}{r_2}. \Uparrow$$

Определение

Гиперболой называется геометрический образ уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

в прямоугольной декартовой системе координат.
Указанная система координат называется *канонической*, и уравнение (5) называется *каноническим*.

Так как в уравнение (5) входят только квадраты переменных, гипербола симметрична относительно осей координат и начала координат. Поэтому для выяснения формы гиперболы достаточно изучить ее в первом квадранте. Выразим y через x предполагая, что $x, y \geq 0$: $y(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Ясно, что $x \geq a$, функция $y(x)$ возрастает и выпукла вверх (предлагается убедиться, что $y''(x) < 0$). Рассмотрим луч прямой с уравнением $y = \dfrac{b}{a} \cdot x$, расположенный в первой четверти. Ясно, что $\dfrac{b}{a} \cdot x > \dfrac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$. Это означает, что гипербола расположена "ниже" прямой.

Далее, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\cdot x-\frac{b}{a}\cdot\sqrt{x^2-a^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\cdot\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\cdot\frac{\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0$. Следовательно, при $x\to+\infty$ гипербола неограниченно приближается к прямой $y=\dfrac{b}{a}\cdot x$, которая, таким образом, является асимптотой гиперболы. График гиперболы показан на рис. 3 сл.13. Она состоит из двух ветвей. Для построения графика удобно построить *опорный прямоугольник*, через диагонали которого проходят *асимптоты* гиперболы $y=\pm\dfrac{b}{a}\cdot x$.

Определения

Числа a и b называются *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы. Точки $(-a,0)$ и $(a,0)$ называются *вершинами* гиперболы. Положим $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ называются *фокусами* гиперболы, число $e=\dfrac{c}{a}$ — ее *эксцентриситетом*, прямые с уравнениями $x=-\dfrac{a}{e}$, $x=\dfrac{a}{e}$ — *директрисами* гиперболы. Отрезки, соединяющие точку на гиперболы с его фокусами, называются *фокальными радиусами* этой точки. Их обозначают $r_{1\text{пр}}$, $r_{2\text{пр}}$, если точка лежит на правой ветви, и $r_{1\text{лв}}$, $r_{2\text{лв}}$, если точка лежит на левой ветви гиперболы.

График гиперболы

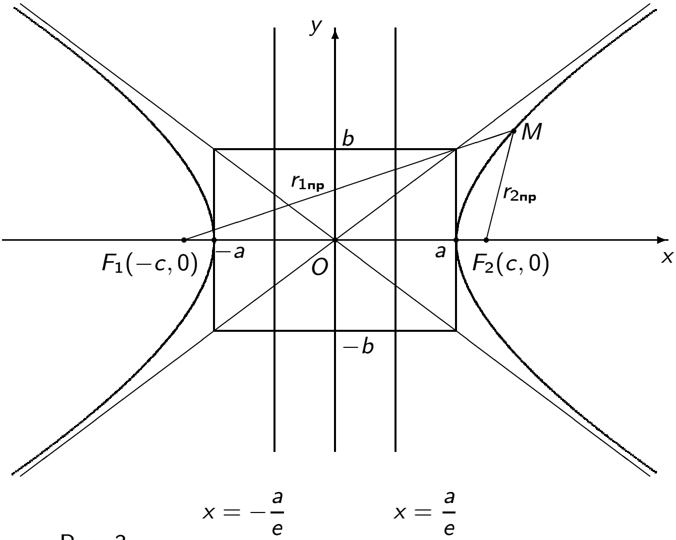


Рис. 3

Утверждения о гиперболе параллельны соответствующим утверждениям об эллипсе и доказательства их похожи, поэтому изложение будет более кратким.

Фокальное свойство гиперболы

Произвольная точка M плоскости лежит на гиперболе, заданной уравнением (5), тогда и только тогда, когда модуль разности расстояний $||F_1M| - |F_2M||$ от точки M до фокусов гиперболы есть постоянная величина, равная $2a$.

$\Downarrow$Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на гиперболе, заданной уравнением (5). Вычислим $r_1 = |F_1M_0| = \sqrt{(x_0+c)^2 + y_0^2}$. Имеем $y_0^2 = \frac{b^2x_0^2}{a^2} - b^2$, откуда $r_1^2 = (x_0+c)^2 + y_0^2 = x_0^2 + 2x_0c + c^2 + \frac{b^2x_0^2}{a^2} - b^2 = x_0^2(1 + \frac{b^2}{a^2}) + 2x_0c + a^2 = \frac{c^2x_0^2}{a^2} + 2x_0c + a^2 = (ex_0 + a)^2$ (мы пользуемся равенством $c^2 = a^2 + b^2$). Таким образом, $r_1 = |a + ex_0|$. Поскольку $|x_0| \geq a$ и $e > 1$, при $x \leq -a$ $r_1 = -a - ex_0$, а при $x \geq a$ $r_1 = a + ex_0$. Аналогично легко вычислить, что $r_2^2 = (x_0 - c)^2 + y_0^2 = (ex_0 - a)^2$ и $r_2 = |a - ex_0|$; при $x \leq -a$ $r_2 = a - ex_0$, а при $x \geq a$ $r_2 = ex_0 - a$. Таким образом, при $x \leq -a$ $r_1 - r_2 = -2a$, а при $x \geq a$ $r_1 - r_2 = 2a$, и $|r_1 - r_2| = 2a$.

Мы видим, что для любой точки $M_0(x_0, y_0)$ на гиперболе справедливы формулы

$$r_1 = |a + ex_0|, r_2 = |a - ex_0|. \qquad (6)$$

Расписывая модули, получаем также формулы

$$r_{1\text{лв}} = -a - ex_0, r_{1\text{пр}} = a + ex_0, \quad r_{2\text{лв}} = a - ex_0, r_{2\text{пр}} = ex_0 - a. \qquad (7)$$

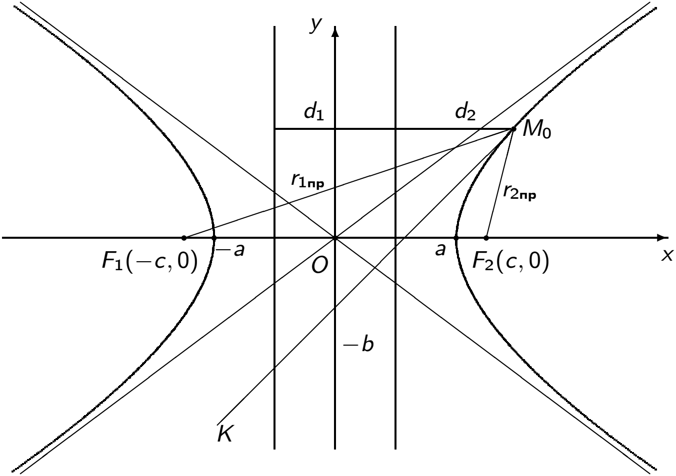
Предположим, что $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, для которой $|F_1M - F_2M| = 2a$. Тогда $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$. Отсюда $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$. Возведя это равенство в квадрат и выполнив преобразования с учетом равенства $c^2 = a^2 + b^2$, придем к уравнению (5).⇑

Обозначим для точки плоскости через d_i расстояние от этой точки до директрисы гиперболы, ближайшей к фокусу F_i $(i = 1, 2)$(см. рис. 4 на следующем слайде).

Теорема

Произвольная точка M плоскости лежит на гиперболе, заданной уравнением (5), тогда и только тогда, когда $e = \dfrac{r_1}{d_1}$ $[e = \dfrac{r_2}{d_2}]$.

$\Downarrow$Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на гиперболе, заданном уравнением (5). Тогда ясно, что $d_1 = |\dfrac{a}{e} + x_0|$, $d_2 = |\dfrac{a}{e} - x_0|$ и легкие вычисления с использованием формул (6) показывают, что $e = \dfrac{r_1}{d_1}$ и $e = \dfrac{r_2}{d_2}$.
Предположим, что $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, для которой $e = \dfrac{r_1}{d_1}$. Учитывая, что $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $d_1 = |\dfrac{a}{e} + x|$, из равенства $r_1 = ed_1$ получаем $(x+c)^2 + y^2 = e^2(\dfrac{a}{e} + x)^2 = (a + ex)^2$. Из равенства $(x+c)^2 + y^2 = (a+ex)^2$, используя преобразования и равенства $e = \dfrac{c}{a}$, $c^2 = a^2 + b^2$, получаем уравнение (5).$\Uparrow$



$$x = -\frac{a}{e} \qquad x = \frac{a}{e}$$

Рис. 4

Используя фокальное свойство гиперболы, можно дать такое

Определение 1

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух фиксированных точек этой плоскости есть постоянная величина.

Используя директориальное свойство гиперболы, приходим к следующему определению.

Определение 2

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых отношение расстояния до фиксированной точки этой плоскости к расстоянию до фиксированной прямой, не содержащей эту точку, есть постоянная величина, большая единицы.

Аналогично предложению сл.8 доказывается следующее утверждение.

Предложение 1

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на гиперболе, заданном уравнением (5). Тогда касательная к гиперболе в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет уравнение

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \tag{8}$$

Аналогично предложению сл.9 доказывается следующее утверждение.

Предложение 2

Касательная к гиперболе в произвольной ее точке M_0 делит пополам угол между фокальными радиусами, проведенными в точку касания.

На рис. 4 $\angle F_1 M_0 K = \angle F_2 M_0 K$.

Определение

В прямоугольной декартовой системе координат геометрический образ уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{9}$$

называется *сопряженной гиперболой* к гиперболе, определяемой уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Сопряженная гипербола имеет действительную полуось b, мнимую полуось a. Ее фокусы лежат на оси Oy. Параметр c тот же, что у исходной гиперболы и асимптоты те же. Графики сопряженной и исходной гипербол приведены на рис. 5, график сопряженной гиперболы выделен полужирной линией.

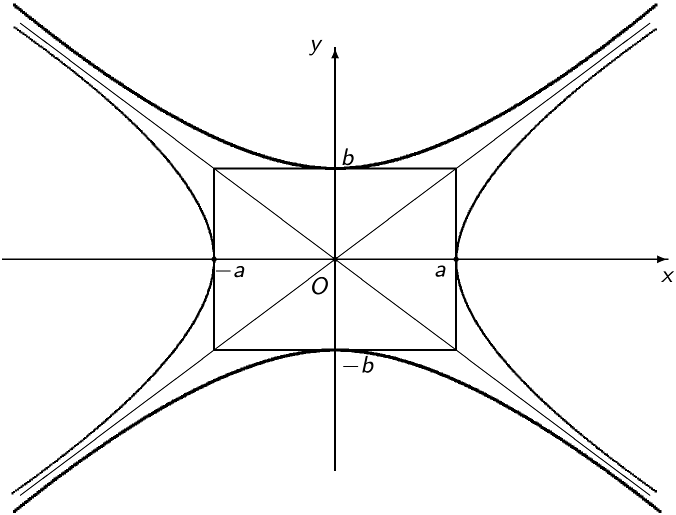


Рис. 5

В школьном курсе алгебры гиперболой называется график функции $y = \dfrac{k}{x}$, где k — постоянное ненулевое число. Это уравнение равносильно уравнению $x \cdot y = k$. Покажем, что последнее уравнение определяет гиперболу. Повернем систему координат на угол $\dfrac{\pi}{4}$ против часовой стрелки. Формулы преобразования координат имеют следующий вид (см. формулы сл.32 т.1-12): $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases}$ Если в уравнение $x \cdot y = k$ подставить x и y из этих формул, то получим $k = xy = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{1}{2}((x')^2 - (y')^2)$. Это означает, что в системе координат $Ox'y'$ "школьная" гипербола определяется уравнением $\dfrac{(x')^2}{|2k|} - \dfrac{(y')^2}{|2k|} = \pm 1$. Поскольку $|2k| = a^2$ для некоторого $a > 0$, получаем уравнение гиперболы при $k > 0$ (см. рис. 6) и сопряженной гиперболы при $k < 0$. Полуоси у этих гипербол равны.

Определение

Гипербола, у которой полуоси равны, называется *равнобочной* или *равносторонней*.

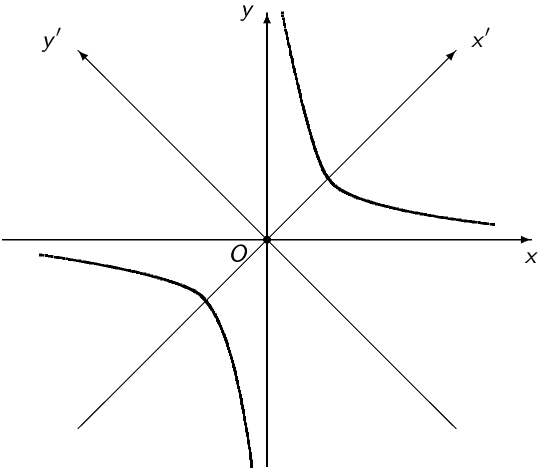


Рис. 6

Определение

Параболой называется геометрический образ уравнения

$$y^2 = 2px, \tag{10}$$

где $p > 0$, в прямоугольной декартовой системе координат.
Указанная система координат называется *канонической*, и уравнение (10) называется *каноническим*.

Так как y входит в каноническое уравнение параболы только во второй степени, график параболы симметричен относительно оси Ox. Ясно, что $x = \dfrac{y^2}{2p} \geqslant 0$, т.е. вся парабола расположена в правой полуплоскости. В первой четверти y можно представить функцией от x, а именно, $y = \sqrt{2px}$. Если $x = 0$, то $y = 0$. С ростом x возрастает и y, причем неограниченно. Легко проверить, что $y'' < 0$ при $x > 0$, т.е. парабола выпукла вверх. График параболы изображен на рис. 7.

График параболы

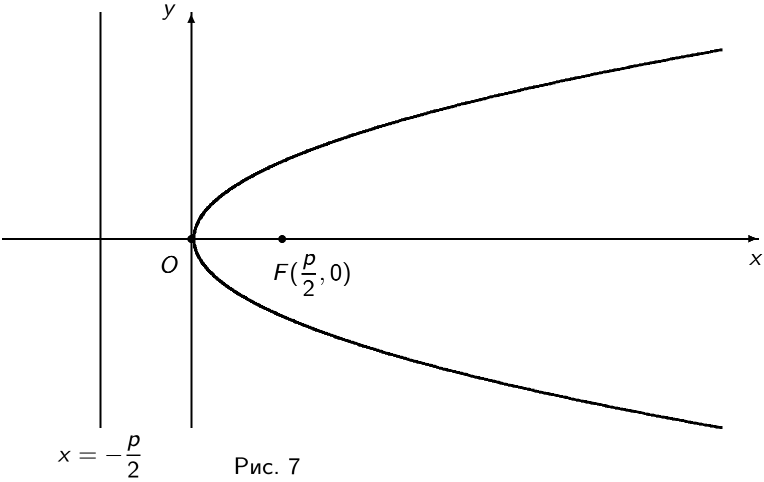


Рис. 7

Определения

Точка $O(0,0)$ называется *вершиной* параболы, а точка $F(p/2,0)$ — ее *фокусом*. Прямая с уравнением $x = -\dfrac{p}{2}$ называется *директрисой* параболы, а число p (равное расстоянию от фокуса до директрисы) — ее *параметром*.

Теорема

Точка M принадлежит параболе тогда и только тогда, когда она равноудалена от фокуса параболы и от ее директрисы

$\Downarrow$ Предположим, что ℓ — директриса параболы, а точка $M(x,y)$ принадлежит параболе. Тогда

$$\begin{aligned} |FM| &= \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} = \sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px} = \\ &= \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} = x+\frac{p}{2} \end{aligned}$$

(последнее равенство вытекает из того, что $x \geqslant 0$). Очевидно, что $d(M,\ell) = x + p/2$. Следовательно, $|FM| = d(M,\ell)$.

Пусть теперь $M(x,y)$ — произвольная точка плоскости и $|FM| = d(M,\ell)$. Записав последнее равенство в координатах, получим $\sqrt{(x-p/2)^2+y^2} = |x+p/2|$. После возведения обеих частей последнего равенства в квадрат и приведения подобных, имеем $y^2 = 2px$. Это означает, что точка M принадлежит параболе. $\Uparrow$

В школьном курсе алгебры параболой называется график функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Легко понять, что "школьная" парабола является и параболой в смысле определения сл.24. Выделим в правой части равенства $y = ax^2 + bx + c$ полный квадрат по x, получим: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$. Сделав замену переменных
$$\begin{cases} x' = x + \frac{b}{2a}, \\ y' = y + \frac{b^2}{4a} - c, \end{cases}$$
получим уравнение $y' = a(x')^2$. Применяя теперь замену переменных $x'' = y'$, $y'' = x'$ и полагая $p = \dfrac{1}{2a}$ (напомним, что $a \neq 0$), приходим к уравнению $(y'')^2 = 2px''$. Если $p > 0$, то получается каноническое уравнение параболы. В противном случае надо еще сделать замену переменных $x''' = -x''$, $y''' = y''$.

Предложение 1

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на параболе, заданном уравнением (10). Тогда касательная к параболе в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет уравнение

$$y_0 \cdot y = p(x_0 + x). \tag{11}$$

$\Downarrow$Запишем уравнение касательной в виде $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Чтобы найти $y'(x_0)$, продифференцируем равенство (10) по x, считая y функцией от x: $2y \cdot y' = 2p$. Тогда $y'(x_0) = \frac{p}{y_0}$. Имеем $y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$, откуда $y_0 \cdot y = y_0^2 + px - px_0 = p(x_0 + x)$, поскольку $y_0^2 = 2px_0$.$\Uparrow$

Оптическое свойство параболы широко применяется в технике для проектирования различных отражателей света.

Предложение 2

Если покрыть параболу изнутри отражающим свет слоем и поместить в ее фокус источник света, то отраженные от параболы лучи света образуют пучок лучей, параллельных оси симметрии параболы.

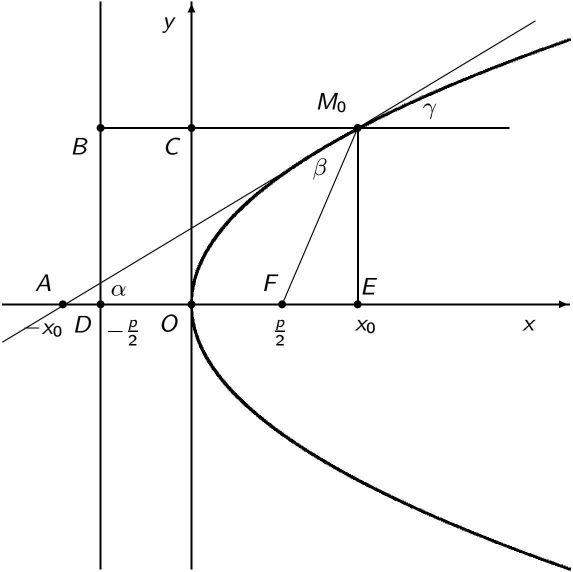


Рис. 8

$\Downarrow$Проведем через точку $M_0(x_0, y_0)$ касательную к параболе и докажем, что $\angle\beta = \angle\gamma$ (см. рис. 8). Уравнение касательной $y_0 \cdot y = p(x_0 + x)$. Она пересекает ось Ox в точке $A(-x_0, 0)$, Так как $\angle\alpha = \angle\gamma$ по свойству параллельных прямых, достаточно проверить, что $\triangle AFM_0$ равнобедренный. Имеем $|FM_0| = |BM_0| = |BC| + |CM_0| = |DO| + |OE| = \frac{p}{2} + x_0$ и $|AF| = |AO| + |OF| = x_0 + \frac{p}{2}$.$\Uparrow$

Рассмотрим эллипс, параболу или одну ветвь гиперболы. Зафиксируем фокус и ближайшую к нему директрису кривой и рассмотрим полярную систему координат с полюсом в фокусе и полярным лучом, перпендикулярным к директрисе. Пусть e — эксцентриситет кривой (у параболы $e = 1$) и p — длина половины ее фокальной хорды (у параболы p — параметр).

Предложение

Уравнение эллипса, параболы или одной ветви гиперболы в полярных координатах

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{12}$$

⇓Зафиксируем точку M на кривой с полярными коррдинатами (r, φ) (см. рис. 9). Так как в силу директориального свойства $\frac{r}{d} = e$, заключаем, что $|CM| = \frac{r}{e}$. Имеем $|CM| = |AE| = |AF| + |FE|$. Из $\triangle FME$ получаем $|FE| = r\cos\varphi$. Так как $|FD| = p$ и $\frac{|FD|}{|BD|} = e$, имеем $|AF| = |BD| = \frac{p}{e}$. Следовательно, $\frac{r}{e} = \frac{p}{e} + r\cos\varphi$. Умножив обе части этого равенства на e и затем выразив r, получим требуемую формулу.⇑

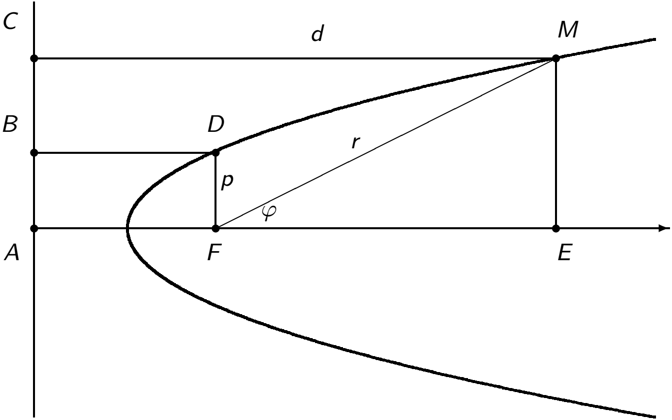


Рис. 9

Предложение

Для эллипса с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ или гиперболы с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ параметр $p = \frac{b^2}{a}$. Для параболы p — ее параметр.

$\Downarrow$Параметр p есть ордината точки на эллипсе или гиперболе, у которой абсцисса равна c. Учитывая, что $p > 0$ и принимая во внимание соотношения между a, b, c для эллипса или гиперболы, из соотношений $\frac{c^2}{a^2} \pm \frac{p^2}{b^2} = 1$ легко получаем требуемое равенство.$\Uparrow$

Предложение

Пусть кривая задана полярным уравнением (12). Тогда при $e < 1$ полуоси эллипса суть $a = \dfrac{p}{1-e^2}$, $b = \dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}$, а при $e > 1$ полуоси гиперболы суть $a = \dfrac{p}{e^2-1}$, $b = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}}$.

$\Downarrow$Предположим, что $e < 1$. Так как для эллипса $b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1-e^2)$ и в силу предложения сл.33 $p = \dfrac{b^2}{a}$, получаем $a(1-e^2) = p$, откуда получается формула для a. Поскольку $b^2 = pa = \dfrac{p^2}{1-e^2}$, получаем требуемую формулу для b. В случае гиперболы доказательство аналогичное.$\Uparrow$