Тема 1-17: Прямая в пространстве

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Этот слайд фактически повторяет слайд 4 т.1-15.
Зафиксируем в пространстве произвольную декартову систему координат $Oxyz$. Пусть ℓ — прямая в пространстве, проходящая через точку M_0. Возьмем на этой прямой некоторый базис $\vec{a}$.

Определение

Точка M_0 называется *начальной точкой* прямой ℓ, а вектор $\vec{a}$ — ее *направляющим вектором*.

Из геометрических соображений легко понять, что произвольная точка плоскости M будет лежать на прямой ℓ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ коллинеарны. Согласно предложению и следствию сл.15 т.1-12, так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$. Напомним, что $M - M_0 = \overrightarrow{M_0M}$ (см. сл.33 т.1-12). Таким образом, $M \in \ell \Leftrightarrow M - M_0 = t\vec{a}$ и мы приходим к *векторному уравнению прямой в пространстве*.

Векторное уравнение прямой в пространстве

$$M = M_0 + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Обозначим координаты точки M через (x, y, z), точки M_0 через (x_0, y_0, z_0) и пусть $[\vec{a}] = (p, q, r)$. Тогда из (1) получаются

Параметрические уравнения прямой в пространстве

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases} \tag{2}$$

Пусть ℓ — прямая в пространстве, проходящая через точку M_0 с известными координатами (x_0, y_0, z_0), и имеющая направляющий вектор $\vec{a}$, $[\vec{a}] = (p, q, r)$, $p^2 + q^2 + r^2 > 0$, поскольку $\vec{a} \neq \vec{0}$. Пусть $M(x, y, z)$ — точка пространства. Так как $M \in \ell \Leftrightarrow M - M_0 = t\vec{a}$, используя критерий коллинеарности векторов по координатам (см. сл.22 т.1-12), получаем

Канонические уравнения прямой в пространстве

$$\ell : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \qquad (3)$$

Для записи и параметрических, и канонических уравнений прямой в пространстве используется одна и та же информация о прямой: координаты начальной точки и координаты направляющего вектора. Поэтому переход от канонических уравнений к параметрическим и обратно не представляет никаких трудностей.

С помощью канонических уравнений можно записать уравнения прямой ℓ, проходящей через две различные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$:

$$\ell : \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{4}$$

В самом деле, вектор $M_1 - M_0$ является направляющим для прямой ℓ.

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей. Если $\ell = \pi_1 \cap \pi_2$ и $\pi_1 : Ax_1 + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$, $\pi_2 : Ax_2 + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$, то приходим к следующему определению.

Определение

Система уравнений

$$\ell : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

называется *общими уравнениями прямой в пространстве*.

При этом главные векторы плоскостей π_1 и π_2 должны быть неколлинеарны.

Легко понять, что из канонических уравнений прямой в пространстве (3) получаются некоторые общие уравнения этой прямой. При решении задач чаще всего наиболее удобно использовать параметрические уравнения прямой в пространстве.

На следующем слайде показано, как перейти от общих уравнений прямой в пространстве к ее параметрическим уравнениям.

Теорема

Для прямой ℓ, заданной общими уравнениями (5), вектор $\vec{a}$ с координатами $\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$ является направляющим.

$\Downarrow$Так как главные векторы $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ неколлинеарны, по крайней мере один из определителей-координат вектора $\vec{a}$ отличен от нуля. Предположим для определенности, что $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Перепишем систему (5) в виде

$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2z - D_2. \end{cases}$ Это крамеровская система уравнений с ненулевым главным определителем. Ее единственное решение

$$x = \begin{vmatrix} -C_1z - D_1 & B_1 \\ -C_2z - D_2 & B_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} =$$

$$\left(z\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}\right) \Big/ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

$y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 z - D_1 \\ A_2 & -C_2 z - D_2 \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} =$
$\left(-z \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} \right) \bigg/ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$. При $z_0 = 0$ получаем $x_0 = -\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ и $y_0 = -\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$. При $z_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ имеем $x_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + x_0$, $y_1 = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + y_0$. На прямой ℓ получили различные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{M_0 M_1}$ является направляющим вектором этой прямой.$\Uparrow$

В качестве начальной точки на прямой ℓ, заданной общими уравнениями (5), можно взять любую точку, координаты которой являются частным решением системы линейных уравнений (5).
Таким образом можно перейти от задания прямой общими уравнениями к параметрическим или каноническим уравнениям.

Пусть в произвольной декартовой системе координат $Oxyz$ заданы общее уравнение плоскости $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ и параметрические уравнения прямой $\ell: \begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases}$ Справедлива следующая

Теорема

1. Прямая ℓ и плоскость π пересекаются тогда и только тогда, когда $Ap + Bq + Cr \neq 0$.
2. $\ell \parallel \pi \iff Ap + Bq + Cr = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.
3. $\ell \subset \pi \iff Ap + Bq + Cr = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

$\Downarrow$Взаимное расположение прямой и плоскости определяется множеством их общих точек. Чтобы найти координаты этих точек, решаем систему из общего уравнения плоскости и параметрических уравнений прямой. Имеем $A(x_0 + pt) + B(y_0 + qt) + C(z_0 + rt) + D = 0$, откуда $(Ap + Bq + Cr)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. При $Ap + Bq + Cr \neq 0$ система имеет единственное решение (общая точка единственная), при $Ap + Bq + Cr = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ она не имеет решений (общих точек нет) и при $Ap + Bq + Cr = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ имеет бесконечное множество решений (все точки прямой принадлежат плоскости).$\Uparrow$

Из теоремы сл.9 непосредственно получается следующее утверждение.

Следствие

Пусть в произвольной декартовой системе координат $Oxyz$ заданы общее уравнение плоскости $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ и координаты вектора $\vec{a} = (p, q, r)$. Тогда $\vec{a} \parallel \pi \Longleftrightarrow Ap + Bq + Cr = 0$.

$\Downarrow$В самом деле, $\vec{a} \parallel \pi$ тогда и только тогда, когда любая прямая с направляющим вектором $\vec{a}$ лежит в плоскости π или параллельна ей. Остается применить теорему сл.9.$\Uparrow$

При решении задач часто приходится находить координаты точки пересечения прямой и плоскости. Они находятся так, как это указано в доказательстве теоремы сл.9. Выводить и запоминать громоздкие формулы для выражения этих координат через коэффициенты уравнений прямой и плоскости не требуется.

Пусть в произвольной декартовой системе координат $Oxyz$ заданы параметрические уравнения двух прямых

$$\ell_1 : \begin{cases} x = x_1 + p_1 t, \\ y = y_1 + q_1 t, \\ z = z_1 + r_1 t \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases} \quad \text{и } \ell_2 : \begin{cases} x = x_2 + p_2 t, \\ y = y_2 + q_2 t, \\ z = z_2 + r_2 t \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases} .$$

Обозначим через $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и $\vec{a}_i = (p_i, q_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$ начальные точки и направляющие векторы этих прямых соответственно. Имеет место следующая

Теорема

1. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ некомпланарны.
2. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ компланарны и $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$.
3. $\ell_1 \parallel \ell_2 \iff \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \nparallel \overrightarrow{M_0M_1}$.
4. $\ell_1 = \ell_2 \iff \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \overrightarrow{M_0M_1}$.

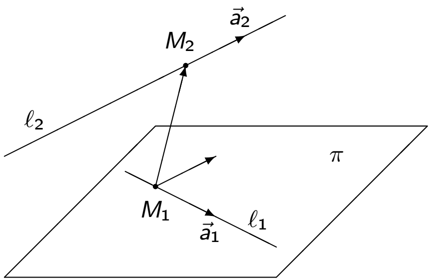

Рис. 1

⇓Докажем утверждение 1. Отложим от точки M_1 векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ (см. рис.1). Рассмотрим плоскость π, проходящую через ℓ_1 компланарно вектору $\vec{a}_2$. Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 скрещиваются, то прямая ℓ_2 не лежит в плоскости π, и векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ некомпланарны. Обратно, если эти векторы некомпланарны, то прямые ℓ_1 и ℓ_2 не лежат в одной плоскости и потому скрещиваются.

Утверждение 2 является непосредственным следствием утверждения 1, так как две прямые в пространстве пересекаются тогда и только тогда, когда они не скрещиваются и их направляющие векторы неколлинеарны. Утверждения 3 и 4 очевидны.⇑

Используя критерии компланарности (сл.14 т.1-14) и коллинеарности (сл.22 т.1-12) векторов через координаты, легко сформулировать необходимые и достаточные условия для каждого случая взаимного расположения двух прямых в терминах координат начальных точек и направляющих векторов.

Если требуется доказать, что прямые ℓ_1 и ℓ_2, заданные параметрическими уравнениями (см. сл.11), пересекаются, и найти координаты точки пересечения, то удобно использовать следующий подход. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — общая точка прямых ℓ_1 и ℓ_2. Тогда ее координаты получаются из параметрических уравнений каждой прямой при своем значении параметра: $\begin{cases} x_0 = x_1 + p_1 t_1, \\ y_0 = y_1 + q_1 t_1, \\ z_0 = z_1 + r_1 t_1. \end{cases}$ и $\begin{cases} x_0 = x_2 + p_2 t_2, \\ y_0 = y_2 + q_2 t_2, \\ z_0 = z_2 + r_2 t_2. \end{cases}$ Отсюда

$$\begin{cases} x_1 + p_1 t_1 = x_2 + p_2 t_2, \\ y_1 + q_1 t_1 = y_2 + q_2 t_2, \\ z_1 + r_1 t_1 = z_2 + r_2 t_2. \end{cases}$$

Полученная система линейных уравнений имеет единственное решение в том и только в том случае, когда прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются, и это решение позволяет легко найти координаты (x_0, y_0, z_0) общей точки M_0 этих прямых.

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ заданы параметрические уравнения двух скрещивающихся прямых

$$\ell_1 : \begin{cases} x = x_1 + p_1 t, \\ y = y_1 + q_1 t, \\ z = z_1 + r_1 t \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases} \quad \text{и } \ell_2 : \begin{cases} x = x_2 + p_2 t, \\ y = y_2 + q_2 t, \\ z = z_2 + r_2 t \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases}.$$

Обозначим через $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и $\vec{a}_i = (p_i, q_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$ начальные точки и направляющие векторы этих прямых соответственно. Тогда имеет место

Предложение

Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми ℓ_1 и ℓ_2 равно

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|\overrightarrow{M_0 M_1} \vec{a}_1 \vec{a}_2|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|}.$$

$\Downarrow$Легко понять (см. рис.1 на сл.12), что искомое расстояние равно расстоянию от любой точки на прямой ℓ_2 до плоскости π, проходящей через прямую ℓ_1 параллельно прямой ℓ_2. В частности, расстояние от точки M_2 до плоскости π есть длина высоты параллелепипеда, построенного на изображениях векторов $\overrightarrow{M_0 M_1}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, отложенных от точки M_1. Она равна отношению объема параллелепипеда к площади его основания на плоскости π, т.е. параллелограмма, построенного на изображениях векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, отложенных от точки M_1.$\Uparrow$

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ заданы общее уравнение плоскости $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ и параметрические уравнения прямой $\ell : \begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases}$

Определение

Если прямая параллельна плоскости или лежит в плоскости, то *угол* между ними по определению равен нулю. Если прямая пересекает плоскость, то *угол* между ними по определению равен острому углу между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Обозначим через $\vec{n}$ и $\vec{a}$ нормальный вектор плоскости π и направляющий вектор прямой ℓ соответственно.

Предложение

Пусть прямая ℓ и плоскость π пересекаются. Тогда

$$\sin\left(\widehat{\ell, \pi}\right) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}||\vec{a}|} = \frac{|Ap + Bq + Cr|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

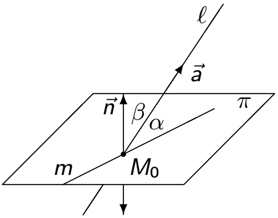

Рис. 2

$\Downarrow$Пусть прямая ℓ пересекает плоскость π в точке M_0 (см. рис.2). Обозначим через m проекцию прямой ℓ на плоскость π, через α угол между прямыми ℓ и m и через β острый угол между перпендикуляром к плоскости и прямой ℓ. Тогда $\sin\alpha = \cos\beta$. Угол β равен либо $\widehat{(\vec{n},\vec{a})}$ (как на рис.2), либо дополняет этот угол до 180^0. Во всех случаях $\sin\alpha = \left|\cos\widehat{(\vec{n},\vec{a})}\right|$.Остается применить формулу (3) сл.6 т.1-13, выражающую косинус угла между векторами через их скалярное произведение и длины.$\Uparrow$

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ заданы координаты точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и параметрические уравнения прямой
$\ell : \begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt \ (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$ с начальной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{a} = (p, q, r)$.

Предложение

Расстояние от точки M_1 до прямой ℓ равно

$$d(M_1, \ell) = \frac{|[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}.$$

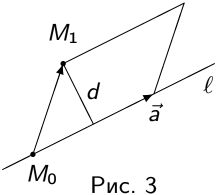

Рис. 3

$\Downarrow$Опустим перпендикуляр из точки M_1 на прямую ℓ и построим параллелограмм на изображениях векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{a}$, отложенных от начальной точки M_0 прямой ℓ (см. рис.3). Искомое расстояние d — длина высоты этого параллелограмма, которая равна отношению площади параллелограмма к длине основания. Остается найти площадь параллелограмма с помощью векторного произведения (сл.19 т.1-14).$\Uparrow$

Задача

Найти параметрические уравнения прямой, коллинеарной вектору $\vec{a} = (1, -3, 2)$ и пересекающей две данные прямые $\ell_1 : \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-1}{2}$ и $\ell_2 : \dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y+6}{2} = \dfrac{z-2}{1}$. Система координат произвольная декартова.

Решение. Искомая прямая ℓ имеет общие точки с прямыми ℓ_1 и ℓ_2 и коллинеарна вектору $\vec{a}$. Следовательно, она лежит в плоскости π, проходящей через прямую ℓ_1 компланарно вектору $\vec{a}$. Точка $\ell \cap \pi$ совпадает с точкой $\ell_2 \cap \pi$.

Находим уравнение плоскости π: $\begin{vmatrix} x-4 & y+2 & z-1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ или $-2(x-4) - 4(y+2) - 5(z-1) = 0$, $2x + 4y + 5z - 5 = 0$. Находим $\ell_2 \cap \pi$. Параметрические уравнения прямой $\ell_2 : x = 4 - t$, $y = -6 + 2t$, $z = 2 + t$ подставляем в уравнении плоскости: $2(4-t) + 4(-6+2t) + 5(2+t) - 5 = 0$ или $11t - 11 = 0$, $t = 1$. Получаем точку $M(3, -4, 3)$ на прямой ℓ. Параметрические уравнения прямой ℓ: $x = 3 + t$, $y = -4 - 3t$, $z = 3 + 2t$. Ответ: $x = 3 + t$, $y = -4 - 3t$, $z = 3 + 2t$.

Задача

Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(4, -3, -1)$ относительно прямой $\ell : \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z+6}{5}$. Система координат прямоугольная декартова.

Решение. Рассмотрим плоскость π, проходящую через точку P перпендикулярно к прямой ℓ. Она пересекает прямую ℓ в точке R, называемой проекцией точки P на прямую ℓ. Точка R делит отрезок $[P, Q]$ пополам.

Для плоскости π направляющий вектор $\vec{a} = (3, 4, 5)$ прямой ℓ является нормальным. Записываем уравнение плоскости π (см уравнение (9) сл.13 т.1-16): $3(x-4) + 4(y+3) + 5(z+1) = 0$ или $\pi : 3x + 4y + 5z + 5 = 0$.

Находим точку $R = \ell \cap \pi$. Для этого подставляем параметрические уравнения прямой ℓ $x = 3 + 3t$, $y = 4 + 4t$, $z = -6 + 5t$ в уравнение плоскости: $3(3+3t) + 4(4+4t) + 5(-6+5t) + 5 = 0$ или $50t = 0$, $t = 0$.

Точка $R(3, 4, -6)$. Точка $Q(x_0, y_0, z_0)$. Так как точка R делит отрезок $[P, Q]$ пополам, имеем $\dfrac{x_0+4}{2} = 3$, $\dfrac{y_0-3}{2} = 4$, $\dfrac{z_0-1}{2} = -6$. Таким образом, $x_0 = 2$, $y_0 = 11$, $z_0 = -11$.

Ответ: $Q(2, 11, -11)$.