# Тема 1-16: Плоскости

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Зафиксируем в пространстве произвольную декартову систему координат $Oxyz$.

## Определения

*Геометрическим образом* уравнения $F(x, y, z) = 0$ относительно системы координат $Oxyz$ называется множество $\pi$ всех точек в пространстве, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$.
При этом говорят, что уравнение $F(x, y, z) = 0$ *задает* множество точек $\pi$.
Указанное уравнение называется *координатным уравнением* множества точек $\pi$.
Обозначение: $\pi : F(x, y, z) = 0$.

Точное определение поверхности использует понятия, выходящие за пределы курса аналитической геометрии, и дается в курсе дифференциальной геометрии.
Например, геометрическим образом уравнения

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

относительно прямоугольной декартовой системы координат в пространстве является сфера с центром в точке $C(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом $r$.

Зафиксируем в пространстве произвольную декартову систему координат $Oxyz$. Пусть $f(u,v)$, $g(u,v)$ и $h(u,v)$ — некоторые функции, определенные на некотором подмножестве $U$ множества $\mathbb{R}^2$ (чаще всего это прямоугольник, полоса или все множество $\mathbb{R}^2$).

**Определение**

Говорят, что уравнения $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ $z = h(u,v)$, где $(u,v) \in U$, *определяют* множество $\pi$ всех точек в пространстве, координаты которых относительно системы координат $Oxyz$ есть $(f(u,v), g(u,v), h(u,v))$, когда $(u,v) \in U$. Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями* множества точек $\pi$.

Например, уравнения

$$x = x_0 + r\cos u\cos v,\ \ y = y_0 + r\cos u\sin v,\ \ z = z_0 + r\sin u,$$

где $-\frac{\pi}{2} < u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 < v \leq 2\pi$, относительно прямоугольной декартовой системы координат в пространстве определяют сферу с центром в точке $C(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом $r$.

Зафиксируем в пространстве произвольную декартову систему координат $Oxyz$. Пусть $\pi$ — плоскость, проходящая через точку $M_0$. Возьмем на этой плоскости некоторый базис $(\vec{a}, \vec{b})$.

**Определение**

Точка $M_0$ называется *начальной точкой* плоскости $\pi$, а векторы $\vec{a}, \vec{b}$ — ее *направляющими векторами*.

Из геометрических соображений легко понять, что произвольная точка пространства $M$ будет лежать на плоскости $\pi$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны. Согласно следствию сл.18 т.1-12, так как $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, векторы $\overrightarrow{M_0M}$ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a} + v\vec{b}$ для некоторых $u.v \in \mathbb{R}$. Напомним, что $M - M_0 = \overrightarrow{M_0M}$ (см. сл.33 т.1-12). Таким образом, $M \in \pi \Leftrightarrow M - M_0 = u\vec{a} + v\vec{b}$ и мы приходим к векторному уравнению плоскости.

**Векторное уравнение прямой плоскости**

$$M = M_0 + u\vec{a} + v\vec{b}, \quad u.v \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Обозначим координаты точки $M$ через $(x, y, z)$, точки $M_0$ через $(x_0, y_0, z_0)$ и пусть $[\vec{a}] = (a_1, a_2, a_3)$, $[\vec{b}] = (b_1, b_2, b_3)$. Тогда из (1) получаются

**Параметрические уравнения плоскости**

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1, \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \quad (u, v \in \mathbb{R}). \end{cases} \tag{2}$$

Параметрические уравнения плоскости устанавливают связь между координатами $(x, y, z)$ произвольной точки $M$ на плоскости в пространственной системе координат $Oxyz$ и ее координатами $(u, v)$ в системе координат $(M_0, \vec{a}, \vec{b})$ на плоскости $\pi$ (см. рис. 1 на следующем слайде).

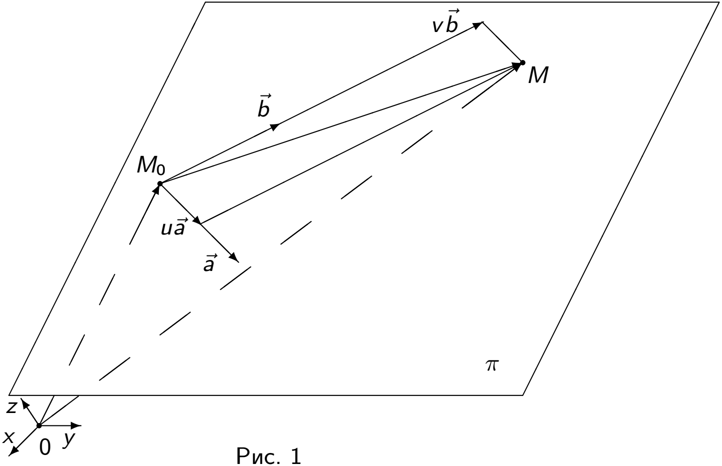


Рис. 1

Зафиксируем в пространстве произвольную декартову систему координат $Oxyz$. Пусть $\pi$ — плоскость, проходящая через точку $M_0$. Возьмем на этой плоскости некоторый базис $(\vec{a}, \vec{b})$. Обозначим координаты точки $M_0$ через $(x_0, y_0, z_0)$ и пусть $[\vec{a}] = (a_1, a_2, a_3)$, $[\vec{b}] = (b_1, b_2, b_3)$. Произвольная точка $M(x, y, z)$ пространства принадлежит плоскости $\pi$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны. С помощью критерия компланарности векторов в координатах (сл.14 т.1-14) получаем

**Каноническое уравнение плоскости**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

При раскрытии определителя по первой строке получается координатное уравнение плоскости.

Пусть три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ не лежат на одной прямой. Тогда они определяют единственную плоскость $\pi$, у которой точка $M_0$ является начальной, а векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ — направляющими. С помощью уравнения плоскости (3), получаем

### Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Пусть даны две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и вектор $\vec{a}$ с координатами $(a_1, a_2, a_3)$ так, что векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{a}$ неколлинеарны. Тогда существует единственная плоскость $\pi$ такая, что $M_0, M_1 \in \pi$ и $\vec{a} \parallel \pi$. Применяя уравнение плоскости (3), получаем

### Уравнение плоскости, проходящей через две точки компланарно вектору

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

### Определение

Уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A, B, C, D$ — фиксированные числа и $A, B, C$ одновременно не обращаются в нуль, называется *алгебраическим уравнением первой степени с тремя неизвестными*.

### Теорема

В произвольной декартовой системе координат в пространстве плоскости и только они являются геометрическим образами алгебраических уравнений первой степени с тремя неизвестными.

⇓Пусть $\pi$ — произвольная плоскость. Распишем в ее каноническом уравнении (3) определитель по первой строке:
$(x - x_0)\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - (y - y_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$. Положим
$A = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, $B = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Так как $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, числа $A, B, C$ одновременно не обращаются в нуль. Получаем уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Раскрывая скобки и полагая $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получаем требуемое: $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$.

Пусть теперь $Ax + By + Cz + D = 0$ — произвольное алгебраическое уравнение первой степени с тремя неизвестными и $\alpha$ — его геометрический образ. Предположим для определенности, что $A \neq 0$. Тогда точка $M_0$ с координатами $x_0 = -C/A$ и $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ принадлежит $\alpha$, так как

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{6}$$

Возьмем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатами $(-B, A, 0)$ и $(-C, 0, A)$ соответственно. Ясно, что $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$. Пусть $\pi$ — плоскость, проходящая через точку $M_0$ с направляющими векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда согласно уравнению (6) $\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0$. Расписав определитель по первой строке, получим $A^2(x - x_0) + AB(y - y_0) + AC(z - z_0) = 0$. Сократив на $A$, раскрыв скобки и воспользовавшись (3), получим $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$. Следовательно, $\pi = \alpha$.$\Uparrow$

### Определение

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A, B, C$ одновременно не обращаются в нуль, называется *общим уравнением плоскости*.

Общее уравнение является координатным уравнением плоскости.

Из доказательства теоремы получается

**Следствие**

Если плоскость $\pi$ задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A \neq 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатами $(-B, A, 0)$ и $(-C, 0, A)$ соответственно являются направляющими для этой плоскости.

Определите направляющие векторы плоскости в случаях $B \neq 0$ и $C \neq 0$.

Если в общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ плоскости $\pi$ все коэффициенты отличны от нуля, то оно равносильно уравнению $\dfrac{x}{-D/A} + \dfrac{y}{-D/B} + \dfrac{z}{-D/C} = 1$. Полагая $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/B$, получаем

**Уравнение плоскости в отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{7}$$

Плоскость $\pi$ пересекает оси $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно в точках с координатами $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ и $(0, 0, c)$.

Зафиксируем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Пусть плоскость $\pi$ задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда вектор $\vec{n}$ с координатами $(A, B, C)$ перпендикулярен к неколлинеарным направляющим векторам $\vec{a}$ с координатами $(-B, A, 0)$ и $\vec{b}$ с координатами $(-C, 0, A)$, так как скалярные произведения $\vec{n}\vec{a} = A(-B) + BA = 0$ и $\vec{n}\vec{b} = A(-C) + CA = 0$. Поэтому вектор $\vec{n}$ перпендикулярен к плоскости $\pi$.

**Определение**

Вектор $\vec{n}$ с координатами $(A, B, C)$ называется *нормальным вектором* плоскости $\pi$, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

По нормальному вектору и начальной точке уравнение плоскости однозначно восстанавливается.

В самом деле, точка пространства $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно к вектору $\vec{n}$ с координатами $(A, B, C)$ тогда и только тогда, когда

$$\vec{n} \cdot (M - M_0) = 0. \tag{8}$$

Это векторное уравнение плоскости по точке и нормальному вектору. Расписывая в нем скалярное произведение через координаты векторов, получаем

### Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору

Плоскость, перпендикулярная ненулевому вектору $\vec{n}$ с координатами $(A, B, C)$, проходящая через точку $M_0$ с координатами $(x_0, y_0, z_0)$, задается уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{9}$$

**Определение**

В случае произвольной декартовой системы координат для плоскости $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ вектор $\vec{n}$ с координатами $(A, B, C)$ называется *главным вектором* этой плоскости.

Зафиксируем в пространстве произвольную декартову систему координат $Oxyz$. Пусть $\pi_1 : Ax_1 + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : Ax_2 + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ — две плоскости. По коэффициентам уравнений выясним, как располагаются эти плоскости. Обозначим через $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ главные векторы этих плоскостей.

**Теорема**

Справедливы следующие утверждения.

1. Плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$ пересекаются тогда и только тогда, когда $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$.
2. $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$.
3. $\pi_1 = \pi_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

# Доказательство

$\Downarrow$Предположим, что $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$ и покажем, что плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$ пересекаются. Предположим для определенности, что $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Положим $z_0 = 0$ и найдем $x_0, y_0$ из системы уравнений $\begin{cases} Ax_1 + B_1 y = -D_1, \\ Ax_2 + B_2 y = -D_2. \end{cases}$ Это крамеровская система с ненулевым главным определителем. Она имеет единственное решение $(x_0, y_0)$. Таким образом, точка $M_0(x_0, y_0, 0)$ принадлежит $\pi_1 \cap \pi_2$. Следовательно, $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$. Рассмотрим плоскость $\gamma : z = 0$. Из доказанного следует, что $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \gamma = \{M_0\}$. Поэтому плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$ не могут совпадать: иначе $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \gamma = \pi_2 \cap \gamma \neq \{M_0\}$. Следовательно, плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$ пересекаются.
Предположим, что $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$. Тогда система уравнений $\begin{cases} Ax_1 + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ Ax_2 + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$ несовместна и потому $\pi_1 \parallel \pi_2$.
Предположим, что $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$. Тогда уравнения $Ax_1 + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $Ax_2 + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ отличаются ненулевым множителем и потому равносильны. Следовательно, $\pi_1 = \pi_2$.
Из доказанных утверждений вытекают и обратные импликации в утверждениях 1,2,3 теоремы сл.15.$\Uparrow$

**Определение**

*Несобственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей, параллельных или совпадающих с данной плоскостью.

Ясно, что несобственный пучок определяется любой своей плоскостью. Он представляет собой класс по следующему отношению эквивалентности на множестве всех плоскостей: две плоскости находятся в этом отношении тогда и только тогда, когда они совпадают или параллельны. Легко понять, что любая плоскость из несобственного пучка, определяемого плоскостью $\ell : Ax + By + Cz + D = 0$, имеет следующее уравнение.

**Уравнение несобственного пучка**

$$Ax + By + Cz + \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

### Определение

*Собственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей, проходящих через фиксированную прямую.

Ясно, что собственный пучок определяется любой парой своих различных плоскостей.

### Теорема

Пусть $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ — пересекающиеся плоскости. Произвольная плоскость принадлежит собственному пучку плоскостей, определяемому плоскостями $\pi_1$ и $\pi_2$ тогда и только тогда, когда ее уравнение может быть представлено в виде

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda^2 + \mu^2 > 0. \tag{10}$$

Это *уравнение собственного пучка плоскостей*.

$\Downarrow$Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы сл.17 т.1-15 об уравнении собственного пучка прямых на плоскости (см. сл.18,19 т.1-15).$\Uparrow$

**Определение**

Если две плоскости параллельны или совпадают, то угол между ними по определению равен нулю.

Пересекающиеся плоскости образуют между собой четыре угла. Так как углы с взаимно перпендикулярными сторонами равны и нормальный вектор плоскости перпендикулярен к любой прямой, лежащей в этой плоскости, линейный угол двугранного угла равен углу между подходящими нормальными векторами. Если плоскости заданы общими уравнениями в прямоугольной декартовой системе координат $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то их нормальные векторы $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ образуют угол $\varphi$, для которого $\cos\varphi = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$. Вычислив скалярное произведение и длины векторов в прямоугольной декартовой системе координат, получаем формулу для косинуса угла между плоскостями.

$$\cos(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{11}$$

Если плоскости заданы общими уравнениями $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ в прямоугольной декартовой системе координат, то они перпендикулярны в том и только том случае, когда

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Материал этого пункта аналогичен материалу сл.23 т.1-15.
Зафиксируем аффинную декартову систему координат в пространстве и плоскость $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$. Плоскость $\pi$ разбивает пространство на части, называемыми *полупространствами*. Главный вектор $\vec{n}$ плоскости $\pi$ (см. сл.14) некомпланарен плоскости. Это доказывается так же, как для прямой и ее главного вектора на сл.23 т.1-15. Если его отложить от точки на плоскости, то он будет направлен в одно из полупространств.
Аналогично предложению сл.24 т.1-15 доказывается следующее утверждение.

**Предложение**

Точка $K(x_K, y_K, z_K)$ принадлежит тому полупространству, в которую направлен главный вектор плоскости $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, отложенный от точки на этой плоскости, тогда и только тогда, когда $Ax_K + By_K + Cz_K + D > 0$.

### Определение

*Решением* неравенства $Ax + By + Cz + D > 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, называется упорядоченная пара чисел $(x_0, y_0, z_0)$, для которых $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D > 0$.

Из предложения предыдущего слайда получается

### Следствие 1

Множество всех решений неравенства $Ax + By + Cz + D > 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, является координатами всевозможных точек того из полуполупространств, на которые плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ разбивает пространство, в которое направлен главный вектор этой плоскости.

Еще одно следствие предложения сл.20 весьма полезно при решении задач.

**Следствие 2**

Две точки лежат по одну сторону от данной плоскости (т.е. в одной полуполупространстве) тогда и только тогда, когда при подстановке их координат в левую часть уравнения этой плоскости получаются числа одного знака.

Заметим, что при почленном умножении уравнения плоскости на $-1$ получается уравнение той же плоскости, но главный вектор заменяется на противоположный.

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат задана плоскость $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

**Предложение**

Расстояние от точки $M_1$ до плоскости $\pi$ выражается формулой

$$d(M_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

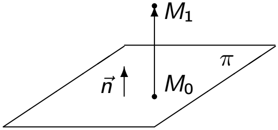

Рис. 2

$\Downarrow$Опустим из точки $M_1$ перпендикуляр на плоскость $\pi$. Основание перпендикуляра обозначим $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Пусть $\vec{n} = (A, B, C)$ — нормальный вектор плоскости (см. рис.2). Тогда $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \vec{n}$ и поэтому $|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{M_0M_1}| \cdot |\vec{n}|$. Имеем $d(M_1, \pi) = |\overrightarrow{M_0M_1}|$, $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Поскольку $M_0 \in \pi$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, откуда $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n} = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$. Таким образом, $|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D| = d(M_1, \pi)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.$\Uparrow$

При знакомстве с основными утверждениями о прямых на плоскости и плоскостях в пространстве обращает на себя внимание явное сходство многих из упомянутых утверждений. Это теоремы об общих уравнениях, условия, определяющие взаимное расположение прямых или плоскостей, а также точек относительно прямых или плоскостей, утверждения о полуплоскостях и полупространствах, наконец, формулы для расстояния от точки до прямой или до плоскости.

Это сходство объясняется тем фактом, что размерность (т.е. количество векторов в базисе) прямой равна 1, плоскости — 2 и пространства — 3, и размерность прямой на 1 меньше размерности плоскости, а размерность плоскости на 1 меньше размерности пространства.

Материал следующей темы показывает, что многие утверждения о прямых в пространстве совсем не похожи на сооветствующие утверждения о прямых на плоскости и плоскостях.

**Задача**

В прямоугольной декартовой системе координат найти уравнение плоскости, симметричной плоскости $\pi : 2x - 3y + 6z - 17 = 0$ относительно точки $P(2, 0, 1)$.

Решение. Легко видеть, что искомая плоскость параллельна данной плоскости и точка $P$ равноудалена от обеих плоскостей. Находим расстояние $d(P, \pi) = \dfrac{|4 + 6 - 17|}{7} = 1$. Уравнение искомой плоскости $\pi' : 2x - 3y + 6z + \lambda = 0$. Имеем $d(P, \pi') = \dfrac{|4 + 6 + \lambda|}{7} = 1$, откуда $|10 + \lambda| = 7$ и $\lambda = -3$.

Ответ: уравнение плоскости, симметричной плоскости $\pi$ относительно точки $P$: $2x - 3y + 6z - 3 = 0$.

## Задача

В произвольной декартовой системе координат на плоскости $\pi : 2x - 3y + 6z - 18 = 0$ зафиксированы точки $A(3, 2, 3)$, $B(6, 2, 2)$ и $C(3, -2, 1)$. На плоскости $\pi$ рассматривается система координат $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Найти в этой системе координат уравнение прямой пересечения плоскости $\pi$ с плоскостью $\pi' : 5x + 4y - 6z + 15 = 0$.

Решение. Запишем параметрические уравнения плоскости, используя в качестве начальной точки точку $A$ и в качестве направляющих векторов векторы $\overrightarrow{AB} = (3, 0, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, -4, -2)$: $\begin{cases} x = 3 + 3u, \\ y = 2 - 4v, \\ z = 3 - u - 2v. \end{cases}$

Эти уравнения связывают пространственные координаты $(x, y, z)$ любой точки на плоскости $\pi$ с плоскостными координатами $(u, v)$ этой точки. Поэтому прямая $\ell = \pi \cap \pi_1$ состоит из точек, координаты которых удовлетворяют параметрическим уравнениям плоскости $\pi$ и уравнению плоскости $\pi_1$: $5(3 + 3u) + 4(2 - 4v) - 6(3 - u - 2v) + 15 = 0$, или $21u - 4v + 20 = 0$.

Ответ: уравнение прямой в плоскостной системе координат $21u - 4v + 20 = 0$.

## Задача

Показать, что три плоскости $\pi_1 : 2x + 3y + 4z = 1$, $\pi_2 : 3x + 4y + 5z = 3$, $\pi_3 : 4x + 5y + 6z = 1$ образуют бесконечную "призму". Найти уравнение плоскости $\pi_4$, параллельной плоскости $\pi_3$ и проходящей через прямую $\pi_1 \cap \pi_2$.

Решение. Так как плоскости $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$ попарно пересекаются, достаточно проверить, что $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$. Запишем расширенную матрицу системы из уравнений плоскостей $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$ и убедимся, что эта система несовместна. Из каждой строки, начиная с последней, вычитаем предыдущую.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Уравнение плоскости $\pi_4$ будем искать с помощью уравнения собственного пучка плоскостей (см. формулу (10) сл.17). Имеем $\pi_4 : \lambda(2x + 3y + 4z - 1) + \mu(3x + 4y + 5z - 3) = 0$ или $(2\lambda + 3\mu)x + (3\lambda + 4\mu)y + (4\lambda + 5\mu)z - \lambda - 3\mu = 0)$. Из условия $\pi_4 \parallel \pi_3$ следует $\dfrac{2\lambda + 3\mu}{4} = \dfrac{3\lambda + 4\mu}{5} = \dfrac{4\lambda + 5\mu}{6}$, откуда $2\lambda + \mu = 0$. Взяв $\lambda = -1$, получаем $\pi_4 : 4x + 5y + 6z - 5 = 0$.