Тема 1-14: Векторное и смешанное произведения

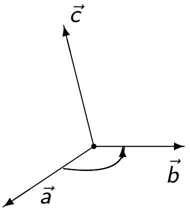
А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Определение

Тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ называется *правой*, если, когда все векторы отложены от одной точки, наблюдателю, смотрящему с конца изображения вектора $\vec{c}$, поворот по наименьшему углу от изображения вектора $\vec{a}$ к изображению вектора $\vec{b}$ кажется происходящим против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой*.



Из трех векторов можно организовать 6 упорядоченных троек.

Определение

Говорят, что тройки $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ являются *циклическими перестановками* тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Оставшиеся 3 тройки называются *нециклическими перестановками* тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Легко убедиться, что если тройка является правой (соответственно левой), то и ее циклические перестановки будут правыми (соответственно левыми) тройками, а нециклические – левыми (соответственно правыми) тройками. Таким образом, имеет место

Наблюдение

Циклическая перестановка векторов сохраняет ориентацию тройки, а нециклическая изменяет ее.

Определение

Векторным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый следующим образом. Если $\vec{a} \| \vec{b}$, то $\vec{c} = \vec{0}$. Пусть $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$. Тогда $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$ и тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – правая.
Обозначения: $[\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{a} \times \vec{b}$.

В случае неколлинеарных векторов длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на изображениях векторов $\vec{a}, \vec{b}$, отложенных от одной точки.

Теорема

Для векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$ и числа $t \in \mathbb{R}$ справедливы следующие утверждения:
1) $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$ (антикоммутативность);
2) $[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$;
3) $[t\vec{a}, \vec{b}] = t[\vec{a}, \vec{b}]$;
4) $[\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c})] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$;
5) $[\vec{a}, t\vec{b}] = t[\vec{a}, \vec{b}]$.

$\Downarrow$Докажем утверждение 1). Оно очевидно, если $\vec{a} \| \vec{b}$. Предположим, что $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Из определения следует, что $|[\vec{b}, \vec{a}]| = |[\vec{a}, \vec{b}]|$ и $[\vec{b}, \vec{a}] \| [\vec{a}, \vec{b}]$. Так как тройка $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$ – правая, тройка $\vec{b}, \vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}]$ – левая. Поскольку тройка $\vec{b}, \vec{a}, [\vec{b}, \vec{a}]$ – правая, заключаем, что $[\vec{b}, \vec{a}] \uparrow\downarrow [\vec{a}, \vec{b}]$, откуда следует утверждение 1).
Утверждения 2) и 3) будут доказаны позже с помощью смешанного произведения.

Утверждение 4) вытекает из утверждений 1) и 2):
$[\vec{a},(\vec{b}+\vec{c})] = -[(\vec{b}+\vec{c}),\vec{a}] = -([\vec{b},\vec{a}]+[\vec{c},\vec{a}]) = -[\vec{b},\vec{a}]-[\vec{c},\vec{a}] = [\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}]$.
Аналогично утверждение 5) выводится из утверждений 1) и 3):
$[\vec{a},t\vec{b}] = -[t\vec{b},\vec{a}] = -t[\vec{b},\vec{a}] = t[\vec{a},\vec{b}]$.$\Uparrow$

Определение

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$, т.е. скалярное произведение векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Теорема о смешанном произведении

Если три вектора компланарны, то их смешанное произведение равно нулю.
Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны, то модуль их смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на изображениях этих векторов, отложенных от одной точки, и смешанное произведение положительно [соотв. отрицательно], если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая [соотв. левая].

$\Downarrow$Предположим, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ и следовательно $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то $[\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}$ и этот вектор перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если $\vec{c} \neq \vec{0}$, то $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{c}$ и скалярное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = 0$. Если $\vec{c} = \vec{0}$, то по определению $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = 0$. Значит, во всех случаях смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно 0.
Предположим, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны. Отложим эти векторы от точки A и построим на их изображениях параллелепипед (см. рис. 1). Объем параллелепипеда $V = Sh$. Так как $S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$, $h = |\text{пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c}|$ и $|[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}| = ||[\vec{a}, \vec{b}]|\text{пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]||\text{пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c}|$, заключаем, что $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

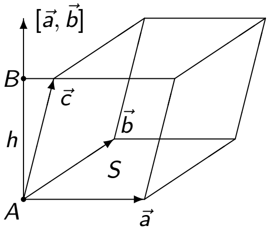


Рис. 1

Во всех случаях $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = |[\vec{a}, \vec{b}]|\text{пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c}$.
Если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, то угол между векторами $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $\vec{c}$ острый, и поэтому $\text{пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c} > 0$, а значит и $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} > 0$.
Если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая, то угол между векторами $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $\vec{c}$ тупой, и поэтому $\text{пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c} < 0$, а значит и $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} < 0$.
Теорема доказана.$\Uparrow$

Следующее утверждение немедленно получается из теоремы.

Следствие 1

Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Как отмечалось на сл.3, из трех векторов можно организовать 6 упорядоченных троек. Объем параллелепипеда, построенного на изображениях трех векторов, отложенных от одной точки, не зависит от ориентации тройки. Поэтому при циклической перестановке аргументов смешанное произведение не изменяется, а при нециклической изменяет знак на противоположный.

Следствие 2

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$ справедливы равенства $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$.

Смешанное произведение линейно по каждому аргументу.

Предложение

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{a}_1, \vec{b}, \vec{b}_1, \vec{c}, \vec{c}_1, \in V_g$ и любого числа $t \in \mathbb{R}$ справедливы равенства
$(\vec{a} + \vec{a}_1)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_1\vec{b}\vec{c}$, $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;
$\vec{a}(\vec{b} + \vec{b}_1)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}_1\vec{c}$, $\vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;
$\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{c}_1) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{c}_1$, $\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

$\Downarrow$Так как $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$, линейность по третьему аргументу следует из линейности скалярного произведения (см. сл.8 т.13):
$\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{c}_1) = [\vec{a}, \vec{b}](\vec{c} + \vec{c}_1) = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} + [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}_1 = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{c}_1$ и
$\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}](t\vec{c}) = t([\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.
Докажем линейность по первому аргументу. В силу следствия 2 и линейности по третьему аргументу имеем
$(\vec{a} + \vec{a}_1)\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}(\vec{a} + \vec{a}_1) = \vec{b}\vec{c}\vec{a} + \vec{b}\vec{c}\vec{a}_1 = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_1\vec{b}\vec{c}$ и
$(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}(t\vec{a}) = t(\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.
Линейность по второму аргументу доказывается аналогично.$\Uparrow$

$\Downarrow$Докажем, что $[(\vec{a}+\vec{b}), \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.
Зафиксируем векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$. Для произвольного вектора $\vec{x} \in V_g$, используя линейность смешанного произведения по первому аргументу, имеем
$[(\vec{a}+\vec{b}), \vec{c}]\vec{x} = (\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{x} = \vec{a}\vec{c}\vec{x} + \vec{b}\vec{c}\vec{x} = [\vec{a}, \vec{c}]\vec{x} + [\vec{b}, \vec{c}]\vec{x} = ([\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}])\vec{x}$,
т.е. $[(\vec{a}+\vec{b}), \vec{c}]\vec{x} = ([\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}])\vec{x}$. В силу слабого закона сокращения для скалярного произведения (сл.17 т.13) получаем требуемое.
Аналогично доказывается, что $[t\vec{a}, \vec{b}] = t[\vec{a}, \vec{b}]$.
Таким образом, векторное произведение оказывается линейно по первому и по второму аргументу.$\Uparrow$

Теорема

Пусть $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – произвольный базис в пространстве V_g, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_g$ и $[\vec{x}]_B = (x_1, x_2, x_3)^\top$, $[\vec{y}]_B = (y_1, y_2, y_3)^\top$, $[\vec{z}]_B = (z_1, z_2, z_3)^\top$.

Тогда $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} (\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3)$.

$\Downarrow$Имеем, пользуясь линейностью смешанного произведения по всем аргументам, $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \left(\sum_{i=1}^3 x_i\vec{b}_i\right)\left(\sum_{j=1}^3 y_j\vec{b}_j\right)\left(\sum_{k=1}^3 z_k\vec{b}_k\right) =$ $\sum_{i=1}^3 \left(x_i\vec{b}_i \left(\sum_{j=1}^3 y_j\vec{b}_j\right)\left(\sum_{k=1}^3 z_k\vec{b}_k\right)\right) =$ $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(x_i\vec{b}_i y_j\vec{b}_j \left(\sum_{k=1}^3 z_k\vec{b}_k\right)\right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_i\vec{b}_i y_j\vec{b}_j z_k\vec{b}_k =$ $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_i y_j z_k \vec{b}_i\vec{b}_j\vec{b}_k$. Если i, j, k не все различны, то векторы $\vec{b}_i, \vec{b}_j, \vec{b}_k$ компланарны и в силу следствия 1 сл.9 $\vec{b}_i\vec{b}_j\vec{b}_k = 0$. Следовательно, $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_i y_j z_k \vec{b}_i\vec{b}_j\vec{b}_k = x_1y_2z_3\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 +$ $x_1y_3z_2\vec{b}_1\vec{b}_3\vec{b}_2 + x_2y_1z_3\vec{b}_2\vec{b}_1\vec{b}_3 + x_2y_3z_1\vec{b}_2\vec{b}_3\vec{b}_1 + x_3y_1z_2\vec{b}_3\vec{b}_1\vec{b}_2 + x_3y_2z_1\vec{b}_3\vec{b}_2\vec{b}_1 =$ $(x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1)\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3$, откуда следует требуемое.$\Uparrow$

Легко видеть, что смешанное произведение $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ векторов правого ортонормированного базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ равно 1. Из теорем сл.12 и сл.7 получаем

Следствие

Пусть $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – произвольный правый ортонормированный базис в пространстве V_g, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_g$ и $[\vec{x}]_B = (x_1, x_2, x_3)^\top$, $[\vec{y}]_B = (y_1, y_2, y_3)^\top$, $[\vec{z}]_B = (z_1, z_2, z_3)^\top$. Тогда $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$.

Тройка $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ является правой [левой] тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0 \left[\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} < 0 \right]$.

Теорема

Пусть $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – произвольный базис в пространстве V_g, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_g$ и $[\vec{x}]_B = (x_1, x_2, x_3)^\top$, $[\vec{y}]_B = (y_1, y_2, y_3)^\top$, $[\vec{z}]_B = (z_1, z_2, z_3)^\top$. Векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$

$\Downarrow$Согдасно следствию 1 сл.9, векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0. По теореме сл.12 $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} (\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3)$. Так как базисные векторы $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ не компланарны, $\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 \neq 0$. Следовательно, $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0$ тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$\Uparrow$

Следствие

Матрица перехода от одного базиса пространства V_g к любому другому его базису является обратимой.

$\Downarrow$Так как векторы любого базиса в пространстве V_g некомпланарны, матрица перехода невырожденная в силу теоремы предыдущего слайда и потому обратима согласно теореме сл.37 т.1-7.$\Uparrow$

Пусть $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – произвольный базис в пространстве V_g.

Определение

Базис $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ называется *взаимным* для базиса B, если $\vec{b}_i\vec{c}_j = 1$ при $i = j$ и $\vec{b}_i\vec{c}_j = 0$ при $i \neq j$, для всех $i, j = 1, 2, 3$.

Наблюдение

Для любого ортонормированного базиса пространства V_g взаимным базисом является он сам.

Теорема

Для любого базиса $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ пространства V_g существует единственный взаимный базис $\left(\frac{1}{\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3}[\vec{b}_2, \vec{b}_3], \frac{1}{\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3}[\vec{b}_3, \vec{b}_1], \frac{1}{\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3}[\vec{b}_1, \vec{b}_2]\right)$.

Доказательство

$\Downarrow$Легко непосредственно проверить, что указанный в формулировке теоремы базис является взаимным к базису $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.
Докажем единственность. Напомним, что через G_B обозначается матрица Грама базиса $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Обозначим через X матрицу из столбцов координат в базисе B векторов некоторого взаимного базиса для базиса B. Из определения и правила вычисления скалярного произведения в произвольном базисе (см. формулу (7) сл.9 т.1-13) следует, что $E_3^\top \cdot G_B \cdot X = E_3$. Таким образом, $G_B \cdot X = E_3$, откуда следует, что матрицы G_B и X обратимые и $X = G_B^{-1}$. Поэтому взаимный базис единствен, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Из доказательства непосредственно получается

Следствие

Пусть $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — произвольный базис пространства V_g. Матрица Грама G_B базиса B является обратимой, а столбцы ее обратной матрицы G_B^{-1} суть столбцы координат в базисе B векторов взаимного базиса для базиса B.

Пусть $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – произвольный базис в пространстве V_g, $\vec{x} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3$. Тогда имеет место формула

Векторное произведение в координатах в произвольном базисе

$$[\vec{x}.\vec{y}] = (x_1y_2 - x_2y_1)[\vec{b}_1, \vec{b}_2] + (x_3y_1 - x_1y_3)[\vec{b}_3, \vec{b}_1] + (x_2y_3 - x_3y_2)[\vec{b}_2, \vec{b}_3].$$

Для доказательства используем линейность векторного произведения по обоим аргументам: $[\vec{x}, \vec{y}] = [x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3, y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3] = x_1y_1[\vec{b}_1, \vec{b}_1] + x_1y_2[\vec{b}_1, \vec{b}_2] + x_1y_3[\vec{b}_1, \vec{b}_3] + x_2y_1[\vec{b}_2, \vec{b}_1] + x_2y_2[\vec{b}_2, \vec{b}_2] + x_2y_3[\vec{b}_2, \vec{b}_3] + x_3y_1[\vec{b}_3, \vec{b}_1] + x_3y_2[\vec{b}_3, \vec{b}_2] + x_3y_3[\vec{b}_3, \vec{b}_3]$. Так как $[\vec{z}, \vec{z}] = \vec{0}$ для любого вектора $\vec{z} \in V_g$, с учетом антикоммутативности векторного произведения получаем требуемое.
Пусть $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ – взаимный базис для базиса $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Тогда имеет место формула, в которой используется символический определитель с первой строкой из векторов (его нужно разложить по первой строке).

Векторное произведение во взаимном базисе

$$[\vec{x}, \vec{y}] = \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 \begin{vmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение в координатах в правом ортонормированном базисе

Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – правый ортонормированный базис. Как отмечено на сл.15, он является своим взаимным базисом. Кроме того, смешанное произведение $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 = 1$. Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$. Из формулы для векторного произведения во взаимном базисе получаем

Формула для векторного произведения в правом ортонормированном базисе

$$[\vec{x}, \vec{y}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Вектор, перпендикулярный к двум данным векторам

Векторное произведение используется для нахождения вектора, перпендикулярного к двум данным неколлинеарным векторам.

Площадь параллелограмма и треугольника

Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на изображениях двух неколлинеарных векторов. Площадь треугольника, две стороны которого - изображения данных неколлинеарных векторов, равна половине длины векторного произведения.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Формула для площади параллелограмма на плоскости

Площадь параллелограмма, построенного на изображениях двух неколлинеарных векторов $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ и $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$, отложенных от одной точки, равна $\mod \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, т.е. модулю определителя, составленного из координат этих векторов.

Для доказательства дополним систему координат вектором $\vec{e}_3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$. Получим правый ортонормированный базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. В этом базисе вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1, a_2, 0)$, а вектор $\vec{a}$ — $(b_1, b_2, 0)$.

Следовательно, $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$. Площадь рассматриваемого параллелограмма равна длине последнего вектора, откуда следует требуемая формула.

Компланарность трех векторов

Смешанное произведение используется для проверки компланарности трех векторов.

Ориентация тройки векторов

Смешанное произведение используется для определения ориентации тройки некомпланарных векторов (правая или левая тройка).

Объем параллелепипеда, призмы, треугольной пирамиды

Объем параллелепипеда, построенного на изображениях трех некомпланарных векторов, отложенных от одной точки, равен модулю смешанного произведения этих векторов. Объем призмы равен половине объема параллелепипеда, объем пирамиды – трети объема призмы или шестой части объема параллелепипеда.

Определение

Двойным векторным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$.

Теорема

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$ имеет место равенство $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$.

$\Downarrow$Предположим, что $\vec{b} \| \vec{c}$. Тогда $[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{0}$ и $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{0}$. Пусть для определенности $\vec{b} = t\vec{c}$. Тогда $\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = (t\vec{c})(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}(t\vec{c})) = t(\vec{c})(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{c})t(\vec{a}\vec{c}) = \vec{0}$. Таким образом, в этом случае утверждение доказано.
Предположим, что $\vec{b} \not\| \vec{c}$. Выберем в пространстве правый ортонормированный базис, положив $\vec{e}_1 = \vec{e}_{\vec{b}}$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_{[\vec{b}, \vec{c}]}$ и $\vec{e}_3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$. В этом базисе вектор $\vec{b}$ имеет координаты $(b, 0, 0)$, вектор $\vec{c}$ имеет координаты $(c_1, 0, c_2)$, и вектор $\vec{a}$ имеет координаты (a_1, a_2, a_3).

Имеем $[\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = -bc_3\vec{e}_2$ и

$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -bc_3 & 0 \end{vmatrix} = (a_3bc_3)\vec{e}_1 - (a_1bc_3)\vec{e}_3.$

Далее, $\vec{a}\vec{c} = a_1c_1 + a_3c_3$, $\vec{a}\vec{b} = a_1b$, $\vec{b} = b\vec{e}_1$, $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_3\vec{e}_3$ и
$\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = (a_1c_1 + a_3c_3)b\vec{e}_1 - a_1b(c_1\vec{e}_1 + c_3\vec{e}_3) = (a_3bc_3)\vec{e}_1 - (a_1bc_3)\vec{e}_3.$
Следовательно, и в этом случае $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$. Теорема доказана.$\Uparrow$

Из этой теоремы непосредственно получается

Следствие

Для любых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V_g$ имеет место равенство
$[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}).$

В самом деле, $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}] = -[\vec{c},[\vec{a},\vec{b}]] = -(\vec{a}(\vec{c}\vec{b}) - \vec{b}(\vec{c}\vec{a})) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}).$