Тема 1-13: Скалярное произведение векторов

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Компонента вектора на вектор

Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$, $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Определение

Компонентой вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ называется вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$ и определяемый следующим образом. Если $\vec{b} = \vec{0}$, то $\vec{c} = \vec{0}$. Если $\vec{b} \neq \vec{0}$, то изображение вектора $\vec{c}$ получаем, откладывая векторы $\vec{a}, \vec{b}$ от одной точки A и взяв проекцию конца изображения вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$, проведенную через точку A (см. рис.1). Направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$, где C — основание перпендикуляра, есть изображение вектора $\vec{c}$. Обозначение компоненты вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b}$.

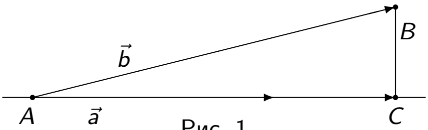

Рис. 1

Легко видеть, что изображение компоненты вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ можно получить, взяв произвольное изображение вектора $\vec{b}$ и взяв проекции его начала и конца на ось вектора $\vec{a}$. Если A, B — проекции соответственно начала и конца изображения вектора $\vec{b}$, то $\overrightarrow{AB}$ будет изображением вектора $\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b}$.

Свойства компоненты

Предложение

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $p \in \mathbb{R}$. Тогда
1) $\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b} + \overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{c}$, 2) $\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}(p\vec{b}) = p(\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b})$.

Эти свойства легко проверяются непосредственно.

Определение

Проекцией вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ называется число

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \begin{cases} |\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b}|, & \text{если } \overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a} \text{ или } \overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{0} \\ -|\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b}|, & \text{если } \overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}. \end{cases}$$

Из определения проекции непосредственно вытекает, что

$$\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b} = (\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b})\vec{e}_{\vec{a}}, \qquad (1)$$

где $\vec{e}_{\vec{a}}$ – орт вектора $\vec{a}$ (см. сл.13 т.1-12). Подставив в правую часть вместо $\vec{e}_{\vec{a}}$ его выражение, получаем формулу

$$\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}}{|\vec{a}|}\vec{a}. \qquad (2)$$

Из свойств компоненты с учетом (1) непосредственно получаются

Свойства проекции

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $p \in \mathbb{R}$. Тогда
1) $\text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} + \text{пр}_{\vec{a}}\vec{c}$, 2) $\text{пр}_{\vec{a}}(p\vec{b}) = p(\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b})$.

Предложение

Если $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, то $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

$\Downarrow$Пусть $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Отложим векторы $\vec{a}, \vec{b}$ от одной точки. Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ и требуемое выполняется. Если $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ – острый угол, то $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} > 0$, и нужное равенство следует из определения косинуса угла в прямоугольном треугольнике. Если $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ – тупой угол, то $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} < 0$, и $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = -\cos(\pi - (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}))$, поэтому требуемое также следует из определения косинуса угла в прямоугольном треугольнике.$\Uparrow$

Определение

Скалярным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$ называется число, равное $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, если $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ и равное 0 в противном случае. Обозначение скалярного произведения: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Как обычно, точку - знак умножения при записи часто будем опускать. Выражение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается через $\vec{a}^2$. Отметим, что другие степени вектора при скалярном умножении не определены. Из определения получается также следующая формула для косинуса угла между ненулевыми векторами:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \tag{3}$$

Из определения скалярного произведения непосредственно вытекают следующие

Свойства скалярного произведения

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$;
3) Если $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Из предложения сл.5 с учетом определения скалярного произведения следует

Наблюдение

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то для любого вектора $\vec{b}$ справедливо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}. \tag{4}$$

Отметим, что проекция и компонента обычно вычисляются с помощью скалярного произведения по формулам

$$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}; \tag{5}$$

$$\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a}^2} \vec{a}, \tag{6}$$

которые легко получаются из формул сл.4 с учетом свойства 2 скалярного произведения.

Следующие два свойства называются *линейностью* скалярного произведения по второму аргументу.

Предложение

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$, $p \in \mathbb{R}$. Тогда
1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, 2) $\vec{a} \cdot (p\vec{b}) = p(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

$\Downarrow$Докажем утверждение 1). Если $\vec{a} = \vec{0}$, то утверждение очевидно. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда на основании (4) и свойств проекции (сл.4) имеем
$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|(\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} + \text{пр}_{\vec{a}}\vec{c}) = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} + |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,
что и требовалось доказать. Утверждение 2 доказывается аналогично.$\Uparrow$

Из свойства 1 скалярного произведения (сл.6) и предложения этого слайда вытекает линейность скалярного произведения по первому аргументу.

Следствие

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$, $p \in \mathbb{R}$. Тогда
1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, 2) $(p\vec{a}) \cdot \vec{b} = p(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Пусть $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — базис в пространстве.

Матрица Грама базиса

Матрица $\begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,2} & \vec{e}_1\vec{e}_2 & \vec{e}_1\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\vec{e}_1 & \vec{e}_2^{\,2} & \vec{e}_2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\vec{e}_1 & \vec{e}_3\vec{e}_2 & \vec{e}_3^{\,2} \end{pmatrix}$ называется *матрицей Грама* базиса B.
Обозначение: G_B.

Матрица Грама заключает в себе информацию о длинах базисных векторов и углах между ними. Матрица Грама для базиса из двух векторов на плоскости определяется аналогичным образом.
Напомним, что через $[\vec{a}]_B$ обозначается столбец координат вектора $\vec{a}$ в базисе B.

Формула для вычисления скалярного произведения по координатам векторов в произвольном базисе

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = [\vec{a}]_B^\top \cdot G_B \cdot [\vec{b}]_B. \qquad (7)$$

Таким образом, скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно произведению строки координат вектора $\vec{a}$ на матрицу Грама и на столбец координат вектора $\vec{b}$. Эта формула справедлива и для базиса на плоскости.

Доказательство формулы для вычисления скалярного произведения в произвольном базисе

$\Downarrow$Рассмотрим случай базиса в пространстве. Пусть $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$. Тогда
$\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = a_1\vec{e}_1 b_1\vec{e}_1 + a_1\vec{e}_1 b_2\vec{e}_2 + a_1\vec{e}_1 b_3\vec{e}_3 + a_2\vec{e}_2 b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 b_2\vec{e}_2 + a_2\vec{e}_2 b_3\vec{e}_3 + a_3\vec{e}_3 b_1\vec{e}_1 + a_3\vec{e}_3 b_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 b_3\vec{e}_3 = a_1(\vec{e}_1^{\,2} b_1 + (\vec{e}_1\vec{e}_2)b_2 + (\vec{e}_1\vec{e}_3)b_3) + a_2((\vec{e}_2\vec{e}_1)b_1 + \vec{e}_2^{\,2} b_2 + (\vec{e}_2\vec{e}_3)b_3) + a_3(\vec{e}_3\vec{e}_1)b_1 + (\vec{e}_3\vec{e}_2)b_2 + \vec{e}_3^{\,2} b_3) = (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,2} b_1 + (\vec{e}_1\vec{e}_2)b_2 + (\vec{e}_1\vec{e}_3)b_3 \\ (\vec{e}_2\vec{e}_1)b_1 + \vec{e}_2^{\,2} b_2 + (\vec{e}_2\vec{e}_3)b_3 \\ \vec{e}_3\vec{e}_1)b_1 + (\vec{e}_3\vec{e}_2)b_2 + \vec{e}_3^{\,2} b_3 \end{pmatrix} =$
$(a_1, a_2, a_3) \cdot \left(\begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,2} & \vec{e}_1\vec{e}_2 & \vec{e}_1\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\vec{e}_1 & \vec{e}_2^{\,2} & \vec{e}_2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\vec{e}_1 & \vec{e}_3\vec{e}_2 & \vec{e}_3^{\,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right)$, что и требуется доказать.
Доказательство в случае базиса на плоскости проводится совершенно аналогично.$\Uparrow$

Возможность вычислить скалярное произведение через координаты векторов позволяет для данных ненулевых векторов по их координатам вычислить их длины и орты, найти косинус угла между ними, в частности, определить, будут ли они перпендикулярны, острый или тупой угол между ними, найти проекцию и компоненту одного вектора на другой.

Рассмотрим пример. Пусть в пространстве задан базис $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, причем $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 2$, $|\vec{e}_3| = 4$, $(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = (\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_3}) = (\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}_3}) = \frac{\pi}{3}$ и известны координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}$ в этом базисе: $\vec{a} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Требуется найти $|\vec{a}|$, $\vec{e}_{\vec{a}}$, $\vec{a}\vec{b}$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, определить, какой угол - острый, тупой или прямой - между ними, найти проекцию и компоненту вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.
Для решения нужно записать матрицу Грама базиса B. Так как $\vec{e}_1^2 = 1$, $\vec{e}_2^2 = 4$, $\vec{e}_1^2 = 16$, $\vec{e}_1\vec{e}_2 = 1$, $\vec{e}_1\vec{e}_3 = 2$, $\vec{e}_2\vec{e}_3 = 4$, имеем $G_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

Вычисляем $\vec{a}^2 = [\vec{a}]_B^\top \cdot G_B \cdot [\vec{a}]_B = (1,-2,3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} =$ $(1,-2,3)\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 42 \end{pmatrix} = 121$. Следовательно, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = 11$ и орт вектора $\vec{a}$ $\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{11}\vec{a}$.

Вычисляем $\vec{a}\vec{b} = [\vec{a}]_B^\top \cdot G_B \cdot [\vec{b}]_B = (1,-2,3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$ $(1,-2,3)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = -27$. Так как $\vec{a}\vec{b} < 0$, косинус угла между векторами $\vec{a}, \vec{b}$ отрицательный и поэтому угол тупой. Чтобы вычислить этот косинус, найдем $|\vec{b}|$. Имеем $\vec{b}^2 = [\vec{b}]_B^\top \cdot G_B \cdot [\vec{b}]_B =$ $(2,1,-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (2,1,-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 12$.

Следовательно, $|\vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ и $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = -\dfrac{27}{22\sqrt{3}} = -\dfrac{9\sqrt{3}}{22}$.

Окончание решения примера

Отметим, что при нахождении косинуса угла не требуется приближенно вычислять угол в случае, когда это невозможно сделать точно.

Наконец, $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = -\dfrac{27}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ и $\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}^2}\vec{b} = -\dfrac{27}{12}\vec{b} = -\dfrac{9}{4}\vec{b}$.

Определение ортонормированного базиса см. на сл.22 т.1-12.

Наблюдение

Базис на плоскости (соответственно в пространстве) является ортонормированным тогда и только тогда, когда его матрица Грама является единичной матрицей E_2 (соответственно E_3).

Из формулы (7) сл.9 получаем формулу для вычисления скалярного произведения в ортонормированном базисе B

$$\vec{a}\vec{b} = [\vec{a}]_B^\top \cdot [\vec{b}]_B.$$

Таким образом, если $[\vec{a}]_B = (a_1, a_2, a_3)$ и $[\vec{b}]_B = (b_1, b_2, b_3)$, то

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Зафиксируем ортонормированный базис $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и рассмотрим произвольный ненулевой вектор $\vec{a}$. Пусть $[\vec{a}]_B = (a_1, a_2, a_3)^\top$. Обозначим через α, β, γ углы, которые вектор $\vec{a}$ образует с векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ соответственно. Вычислим косинусы этих углов. Имеем $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\vec{e}_1}{|\vec{a}||\vec{e}_1|} = \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$ и аналогично $\cos\beta = \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_3}{|\vec{a}|}$. Таким образом, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \dfrac{1}{|\vec{a}|}(a_1, a_2, a_3)$, т.е. орт $\vec{e}_{\vec{a}}$ вектора $\vec{a}$ имеет координаты $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Следовательно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (8)$$

Определение

Направляющими косинусами вектора относительно ортонормированного базиса называются косинусы углов, образованных данным вектором с базисными векторами.

Формула (8) предыдущего слайда показывает, что ненулевой вектор не может образовывать произвольные углы с векторами ортонормированного базиса. Так как любые числа a, b, c, удовлетворяющие условию $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, являются координатами некоторого орта, получаем следующее

Предложение

Ненулевой вектор образует с векторами ортонормированного базиса углы α, β, γ тогда и только тогда, когда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Так как знак ненулевой координаты вектора определяется знаком соответствующего направляющего косинуса, получаем такое

Наблюдение

Пусть a_1, a_2, a_3 — координаты ненулевого вектора $\vec{a}$ в ортонормированном базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда угол $(\widehat{\vec{a}, \vec{e}_i})$ острый, если $a_i > 0$, прямой, если $a_i = 0$, тупой, если $a_i < 0$.

Лемма

Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$. Если для любого вектора $\vec{x} \in V_g$ справедливо равенство $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

$\Downarrow$Из равенства $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$ получаем $\vec{a}\vec{x} - \vec{b}\vec{x} = 0$ и $(\vec{a} - \vec{b})\vec{x} = 0$. Полагая $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$, получаем $(\vec{a} - \vec{b})^2 = 0$, откуда следует $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$. Таким образом, $\vec{a} = \vec{b}$.$\Uparrow$

Утверждение доказанной леммы называется слабым законом сокращения для скалярного произведения. Заметим, что обычный закон сокращения для скалярного произведения не выполняется: из $\vec{x} \neq \vec{0}$ и $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$ не следует $\vec{a} = \vec{b}$. Пример предлагается привести самостоятельно.