Тема 1-11: Многочлены и матрицы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

В теме 1-9 было определено понятие кольца многочленов над полем. Точно так же можно определить кольцо многочленов $K[x]$ над кольцом K, называемым кольцом коэффициентов. Свойства кольца многочленов $K[x]$ зависят от свойств кольца коэффициентов K. Рекомендуется проверить, что если если K является или коммутативным, или ассоциативным кольцом, или кольцом с единицей, или кольцом без делителей нуля, то соответствующим свойством обладает и кольцо $K[x]$.
Пусть F – поле, n – натуральное число. Рассмотрим кольцо многочленов $F^{n\times n}[x]$ над кольцом квадратных матриц $F^{n\times n}$. Элементы этого кольца можно рассматривать и как матрицы, состоящие из многочленов, т.е. элементы кольца матриц $F[x]^{n\times n}$. Пусть $A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m \in F^{n\times n}[x]$ и $A_s = \left(\alpha_{ij}^{(s)}\right)$ для $s = 1, \ldots, m$. Тогда по правилам действий над матрицами получаем $A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m = G$, где $G = (g_{ij}) \in F[x]^{n\times n}$, и многочлены $g_{ij} = \alpha_{ij}^{(0)} + \alpha_{ij}^{(1)}x + \ldots + \alpha_{ij}^{(m)}x^m$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. При этом действия над одними и теми же многочленами по правилам умножения многочленов и умножения матриц приводят к одинаковым результатам.

Пример

Рассмотрим пример записи многочлена из $F^{3\times3}[x]$ в виде матрицы из $F[x]^{3\times3}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+3x+x^2 & 2 & 3+x+x^2 \\ 2x & 5+x+x^2 & -1 \\ 6-x+x^2 & x & 1+5x+x^2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

Пусть F – поле, $A \in F^{n \times n}$.

Определения

Характеристической матрицей матрицы A называется матрица $A - xE_n$.
Характеристическим многочленом матрицы A называется многочлен $|A - xE_n|$ – определитель характеристической матрицы $A - xE_n$.
Обозначение: $\chi_A(x)$.

В развернутом виде характеристический многочлен матрицы $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ имеет вид

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - x \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Вспоминая определение определителя порядка n (сл.6 т.1-7), получаем:

$$\chi_A(x) = |A| + \ldots + (-1)^{n-1}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{nn})x^{n-1} + (-1)^n x^n,$$

поскольку $\chi_A(0) = |A|$ и члены, содержащие x^n, x^{n-1}, могут получиться только из произведения $(\alpha_{11} - x)(\alpha_{22} - x) \ldots (\alpha_{nn} - x)$. В частности,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})x + x^2.$$

Предложение

Коэффициент при x^{n-k} в характеристическом многочлене $\chi_A(x)$ равен сумме миноров $(-1)^{n-k} \sum\limits_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$.

$\Downarrow$Обозначим $(b_{ij})_{n\times n} = A - xE_n$, т.е. $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i \ne j; \\ a_{ii} - x, i = j. \end{cases}$ Тогда $\chi_A(x) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} b_{1\sigma_1} b_{2\sigma_2} \dots b_{n\sigma_n}$. Коэффициент при x^{n-k} получается следующим образом. Зафиксируем индексы $1 \le j_1 < \dots < j_{n-k} \le n$. Выберем в определителе (1) строки и столбцы с одинаковыми номерами $j_1, \dots, j_{n-k}$. Тогда x^{n-k} получается из произведений $b_{1\sigma_1} b_{2\sigma_2} \dots b_{n\sigma_n}$ для всех $\sigma \in S_n$ таких что $\sigma_{j_m} = j_m$ при всех $m = 1, \dots, n-k$, при этом из разности $a_{j_m j_m} - x$ берется слагаемое $-x$. Индексы $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ из множества $\{1, \dots, n\} \backslash \{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ образуют в такой перестановке σ перестановку $(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k})$, причем $I(\sigma) = I(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k})$, поскольку остальные индексы перестановка σ оставляет на месте.
Положим $T(j_1, \dots, j_{n-k}) = \{\sigma \in S_n | \sigma_{j_m} = j_m,\ m = 1, \dots, n-k\}$ и рассмотрим сумму $S(j_1, \dots, j_{n-k})$ всех слагаемых из определителя (1), содержащих в качестве множителей элементы $a_{j_m j_m} - x$ $(m = 1, \dots, n-k)$.

Тогда

$$S(j_1,\ldots,j_{n-k}) = \sum_{\tau\in T(j_1,\ldots,j_{n-k})} (-1)^{I(\tau)} b_{1\tau_1} b_{2\tau_2}\cdots b_{n\tau_n} =$$

$$\prod_{m=1}^{n-k}(a_{j_m j_m}-x) \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} (-1)^{I(\tau)} a_{i_1\tau_{i_1}}\cdots a_{i_k\tau_{i_k}} =$$

$$\prod_{m=1}^{n-k}(a_{j_m j_m}-x)\cdot A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix},$$

так как $\{(\tau_{i_1},\ldots,\tau_{i_k}) | \tau\in T(j_1,\ldots,j_{n-k})\} = S_k$ (все перестановки на множестве $\{i_1,\ldots,i_k\}$) и $I(\tau) = I(\tau_{i_1},\ldots,\tau_{i_k})$. Поэтому получается минор $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix}$.

Следовательно, в определителе (1) коэффициент при x^{n-k} равен коэффициенту при x^{n-k} в сумме $\sum\limits_{1\le j_1<\cdots<j_{n-k}\le n} S(j_1,\ldots,j_{n-k})$, который равен $(-1)^{n-k}\sum\limits_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix}$. ⇑

Пусть F – поле, $A \in F^{n \times n}, f \in F[x]$.

Определение

Будем говорить, что многочлен f *аннулирует* матрицу A, если $f(A) = O$.

Теорема

Для любой матрицы $A \in F^{n \times n}$ ее характеристический многочлен $\chi_A(x)$ аннулирует A.

$\Downarrow$Запишем присоединенную матрицу $(A - xE_n)^{\sim}$ (см. сл.37 т.1-7) к характеристической матрице $A - xE_n$ в виде матричного многочлена (так как при этом каждое алгебраическое дополнение получается из определителя порядка $n-1$ и имеет степень по x не выше $n-1$, указанный многочлен также имеет степень не выше $n-1$):
$(A - xE_n)^{\sim} = B_0 + B_1 x + \ldots + B_{n-1} x^{n-1}$, где $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in F^{n \times n}$. Пусть $\chi_A(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_n x^n$. Так как $(A - xE_n)^{\sim} \cdot (A - xE_n) = |A - xE_n| E_n$, имеем $\gamma_0 E_n + \gamma_1 x E_n + \ldots + \gamma_n x^n E_n = (B_0 + B_1 x + \ldots + B_{n-1} x^{n-1})(A - xE_n)$. Раскрывая скобки и приравнивая матрицы-коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем цепочку равенств, приведенную на следующем слайде (слева от каждого равенства записана соответствующая степень x).

Окончание доказательства теоремы Гамильтона-Кэли

$$\begin{array}{ccc}
x^0 & B_0A = \gamma_0 E_n & \\
x^1 & B_1A - B_0 = \gamma_1 E_n & A \\
x^2 & B_2A - B_1 = \gamma_2 E_n & A^2 \\
\dots & \dots & \dots \\
x^k & B_kA - B_{k-1} = \gamma_k E_n & A^k \\
\dots & \dots & \dots \\
x^{n-1} & B_{n-1}A - B_{n-2} = \gamma_{n-1} E_n & A^{n-1} \\
x^n & -B_{n-1} = \gamma_n E_n & A^n
\end{array}$$

Умножим каждое равенство, начиная со второго, справа на соответствующую степень матрицы A (эти степени записаны справа от каждого равенства) и сложим все равенства. Все слагаемые слева взаимно уничтожатся, а справа получится значение $\chi_A(A)$. Теорема доказана.$\Uparrow$

В силу теоремы Гамильтона-Кэли для любой матрицы $A \in F^{n\times n}$ существует многочлен степени n, аннулирующий ее. Ясно, что существует ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий A. Назовем такие многочлены *минимальными аннулирующими* для матрицы A.

Предложение

Пусть $A \in F^{n\times n}$, $m(x)$ – минимальный аннулирующий многочлен для A, $f(x)$ – произвольный многочлен, аннулирующий A. Тогда $m(x)$ делит $f(x)$.

$\Downarrow$По определению минимального аннулирующего многочлена имеем $\deg(m) \leq \deg(f)$. Разделим f на m с остатком: $f(x) = q(x)m(x) + r(x)$ (см. сл.6 т.1-9). От противного, предположим, что $r(x) \neq 0$. Тогда $\deg(r) < \deg(m)$. Из равенства $f(x) = q(x)m(x) + r(x)$ получаем $f(A) = q(A)m(A) + r(A)$. Так как $f(A) = O$ и $m(A) = O$, заключаем, что и $r(A) = O$. Это противоречит выбору многочлена $m(x)$. Предложение доказано.$\Uparrow$

Из предложения следует, что любые два минимальные аннулирующие многочлены одной и той же матрицы ассоциированы.

Определение

Минимальным многочленом квадратной матрицы A называется ее минимальный аннулирующий многочлен со старшим коэффициентом 1. Обозначение: $\mu_A(x)$.

Предлагается проверить следующие утверждения.

1. Минимальный многочлен скалярной матрицы λE_n есть $\mu_{(\lambda E_n)}(x) = x - \lambda$.
2. Минимальный многочлен квадратной матрицы порядка 2, не являющейся скалярной, равен ее характеристическому многочлену.
3. Минимальный многочлен матрицы $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ порядка n есть $(x - \lambda)^n$ – многочлен, ассоциированный с ее характеристическим многочленом.