Тема 1-10: Корни многочленов. Неприводимые многочлены над полями $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$. Разложение рациональных дробей на простейшие

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ – многочлен над полем F. Этот многочлен можно рассматривать как функцию из F в F, сопоставляющую каждому элементу $\beta \in F$ элемент из F, который называется *значением* многочлена $f(x)$ на элементе β:

$$f(\beta) = \alpha_n \beta^n + \alpha_{n-1}\beta^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \beta + \alpha_0.$$

Определение

Элемент $\beta \in F$ называется *корнем* многочлена $f(x)$, если $f(\beta) = 0$.

Следующее утверждение проверяется непосредственно. Оно называется *теорема Безу*.

Предложение

Пусть $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ – многочлен над полем F и $\alpha \in F$. Тогда $f(x) = q(x)(x - \alpha) + f(\alpha)$, где $q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$, причем

$$b_0 = a_0,\ b_k = a_k + \alpha b_{k-1} \text{ при всех } k = 1, \ldots, n-1, f(\alpha) = a_n + \alpha b_{n-1}. \quad (1)$$

В силу теоремы Безу число β будет корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x) = q(x)(x - \beta)$.

На формулах (1) основан упрощенный алгоритм деления многочлена f на двучлен $x-\alpha$ и нахождения значения $f(\alpha)$, известный под названием *схема Горнера*. Для осуществления алгоритма составляется таблица из двух строк. В первой строке записываются коэффициенты многочлена f по убыванию степеней (без пропусков, если некоторая степень отсутствует, то на соответствующем месте записывается нуль). Вторая строка заполняется с учетом формул (1): первое число переносится из первой строки, каждое последующее получается путем умножения предыдущего (только что полученного) числа из второй строки на число α и сложения результата с числом из первой строки, стоящим над заполняемой клеткой второй строки. Последнее число во второй строке (под свободным членом f) и будет значением $f(\alpha)$, а числа с первого по предпоследнее – коэффициентами частного в порядке убывания степеней. Для удобства проведения вычислений число α выписывают слева от первого элемента второй строки.

Пример использования схемы Горнера

Рассмотрим конкретный пример. Пусть требуется найти значение многочлена $f(x) = x^3 - 18x^2 + 99x - 162$ от числа 3. Вычисления оформляем в виде таблицы:

	1	-18	99	-162
3	1	-15	54	0

Здесь в первой строке выписаны коэффициенты многочлена $f(x)$, а во второй сначала записано число 3, затем перенесен старший коэффициент $f(x)$, равный 1. Каждое последующее число во второй строке получается прибавлением к соответствующему числу первой строки предыдущего числа второй, умноженного на 3: $-15 = -18 + 1 \cdot 3$, $54 = 99 + (-15) \cdot 3$, $0 = -162 + 54 \cdot 3$. Отсюда получаем $f(3) = 0$ и частное $q(x) = x^2 - 15x + 54$ от деления $f(x)$ на $x - 3$, т.е. $f(x) = (x^2 - 15x + 54)(x - 3)$.

Определение

Натуральное число k называется *кратностью* корня α многочлена $f(x)$, если $f(x) = g(x)(x-\alpha)^k$ и $g(\alpha) \neq 0$.

Легко понять, что кратность корня α многочлена $f(x)$ равна кратности неприводимого множителя $x-\alpha$ этого многочлена. Поэтому любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет не более n корней в поле F, а сумма кратностей его корней также не превосходит n.
Одним из мотивов расширения множества действительных чисел до множества комплексных чисел является то, что существуют многочлены с действительными коэффициентами, которые не имеют действительных корней. Таков, например, многочлен x^2+1. Между тем, этот многочлен имеет два комплексных корня: i и $-i$. Возникает вопрос: всякий ли многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень? При этом, разумеется, следует исключить из рассмотрения многочлены степени 0 (т.е. константы). Ответ на поставленный вопрос дает следующее утверждение, которое называют *теоремой Гаусса* или *основной теоремой высшей алгебры*.

Теорема

Любой многочлен степени больше 0 над полем $\mathbb{C}$ имеет корень в $\mathbb{C}$.

Мы не приводим доказательства этого утверждения. Оно будет доказано в курсе теории функций комплексного переменного.
Пусть $f \in \mathbb{C}[x]$, $\deg(f) \geq 1$. По теореме Гаусса $f(x)$ имеет некоторый корень α. Следовательно, $f = (x - \alpha)g$ для некоторого многочлена $g \in \mathbb{C}[x]$. Если многочлен $f(x)$ неприводим над полем $\mathbb{C}$, то $\deg(f) = 1$.
Таким образом, справедливо

Следствие 1

Неприводимыми над полем $\mathbb{C}$ являются только многочлены первой степени.

Рассматривая разложение любого многочлена степени больше 1 из $\mathbb{C}[x]$ на неприводимые множители, над полем $\mathbb{C}$, получаем

Следствие 2

Любой многочлен с комплексными коэффициентами степени больше 1 разлагается на линейные множители с комплексными коэффициентами.

Предложение

Если многочлен f из $\mathbb{R}[x]$ имеет комплексный корень γ, то и число $\overline{\gamma}$, комплексно сопряженное к γ, является корнем f.

$\Downarrow$Пусть $f = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ – многочлен из $\mathbb{R}[x]$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $f(\gamma) = 0$, т.е. $\alpha_n\gamma^n + \alpha_{n-1}\gamma^{n-1} + \ldots + \alpha_1\gamma + \alpha_0 = 0$. Тогда, используя свойства сопряженного комплексного числа (сл.6 т.1-8) и тот факт, что $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \overline{\alpha} = \alpha$, получаем
$f(\overline{\gamma}) = \alpha_n\overline{\gamma}^n + \alpha_{n-1}\overline{\gamma}^{n-1} + \ldots + \alpha_1\overline{\gamma} + \alpha_0 = \overline{\alpha}_n\overline{\gamma}^n + \overline{\alpha}_{n-1}\overline{\gamma}^{n-1} + \ldots + \overline{\alpha}_1\overline{\gamma} + \overline{\alpha}_0 = \overline{\alpha_n\gamma^n + \alpha_{n-1}\gamma^{n-1} + \ldots + \alpha_1\gamma + \alpha_0} = \overline{0} = 0$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Предложение

Многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ неприводим над полем $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда либо $\deg(f) = 1$, либо $\deg(f) = 2$ и f имеет отрицательный дискриминант.

$\Downarrow$Очевидно, что если $\deg(f) = 1$ или $\deg(f) = 2$ и f имеет отрицательный дискриминант, то f неприводим над полем $\mathbb{R}$. Пусть многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ неприводим над полем $\mathbb{R}$. Если он имеет действительный корень, то делится на многочлен первой степени, поэтому $\deg(f) = 1$. Пусть f имеет комплексный корень $\gamma = \alpha + \beta i$ и $\beta \neq 0$. Тогда согласно предложению сл.7 и число $\overline{\gamma} = \alpha - \beta i$ является его корнем. Поэтому f делится на $x - \gamma$ и на $x - \overline{\gamma}$. Так как $\gamma \neq \overline{\gamma}$, указанные двучлены взаимно просты. Согласно утверждению 1 предложения сл.16 темы 1-9 многочлен f делится на их произведение $(x - \gamma)(x - \overline{\gamma})$, которое, как легко вычислить, равно $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ и представляет собой квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом. Так как f неприводим, он ассоциирован с многочленом $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, что завершает доказательство.$\Uparrow$

Для многочленов первой степени ответ на этот вопрос хорошо известен из школьного курса математики. Для многочленов второй степени ответ дается известной формулой корней квадратного уравнения. Действительно, проанализировав вывод этой формулы для случая действительных чисел, изучаемый в школьном курсе, нетрудно понять, что он подходит и для уравнений с комплексными коэффициентами. Повторять этот вывод здесь мы не будем. Отметим лишь, что в комплексном случае формула несколько упрощается. Если $az^2 + bz + c = 0$ – уравнение с комплексными коэффициентами и $a \neq 0$, то

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2}$$

Знак минус перед корнем из дискриминанта можно не ставить, так как здесь подразумевается комплексный корень, имеющий два значения, а не арифметическое значение действительного корня.

В математике известны формулы для нахождения комплексных корней уравнений третьей и четвертой степени, но они громоздки и неудобны для практического применения, и потому мы не будем их приводить. Отметим также, что доказано, что при $n \geq 5$ единой формулы для нахождения корней произвольного уравнения степени n не существует. Однако решать такие уравнения иногда приходится.

Отыскивать рациональные корни многочленов с целочисленными коэффициентами помогает следующее утверждение.

Предложение

Пусть $f(x) = m_0x^n + m_1x^{n-1} + \ldots + m_{n-1}x + m_n$ – многочлен с целочисленными коэффициентами, $\frac{p}{q}$ – рациональное число и несократимая дробь. Если $\frac{p}{q}$ – корень многочлена $f(x)$, то p является делителем m_n, q является делителем m_0 и для любого целого числа s число $f(s)$ делится на $p - qs$. В частности, если $m_0 = 1$ или $m_0 = -1$, то все рациональные корни многочлена $f(x)$ являются целыми числами и делят свободный член m_n.

$\Downarrow$Запишем

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = m_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + m_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + m_{n-1}\frac{p}{q} + m_n, \tag{3}$$

тогда $m_0(\frac{p}{q})^n + m_1(\frac{p}{q})^{n-1} + \ldots + m_{n-1}\frac{p}{q} + m_n = 0$. Умножим обе части этого равенства на q^n: $m_0p^n + m_1p^{n-1}q + \ldots + m_{n-1}pq^{n-1} + m_nq^n = 0$. Отсюда получаем $m_nq^n = -m_0p^n - m_1p^{n-1}q - \ldots - m_{n-1}pq^{n-1}$, поэтому число p делит m_nq^n. Так как числа p, q взаимно просты, p делит m_n. Аналогично доказывается, что q делит m_0.

Окончание доказательства

Для доказательства последнего утверждения предложения запишем $f(s) = m_0 s^n + m_1 s^{n-1} + \ldots + m_{n-1} + m_n$ и вычтем из этого равенства равенство (3) сл.10. Тогда будем иметь $f(s) = m_0(s^n - (\frac{p}{q})^n) + m_1(s^{n-1} - (\frac{p}{q})^{n-1}) + \ldots + m_{n-1}(s - \frac{p}{q})$. Умножив обе части этого равенства на q^n, получим $q^n f(s) = m_0(s^n q^n - p^n) + q m_1(s^{n-1} q^{n-1} - p^{n-1}) + \ldots + q^{n-1} m_{n-1}(sq - p)$. Так как $sq - p$ делит $s^\ell q^\ell - p^\ell$ при любом натуральном ℓ и $(q^n, sq - p) = 1$ при любом целом s, получаем, что $sq - p$ делит $f(s)$. Предложение доказано.$\Uparrow$

Пример 1

Найти рациональные корни многочлена $f(x) = x^4 - 2x^3 - 19x^2 - 24x - 36$.

Решение. В силу предложения, если этот многочлен имеет целочисленные корни, то они находятся среди делителей числа -36. Это число имеет 18 делителей: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 9, -9, 12, -12, 18, -18, 36 и -36. Вычислим сначала $f(1) = -80$ и $f(-1) = -28$. Среди делителей p числа -36 (кроме $1, -1$) выберем такие, чтобы число $p+1$ делило $f(-1) = -28$ и $p-1$ делило $f(1) = -80$. Делители $2, -2$ не годятся. Делители $3, -3$ и 6 годятся, делители $4, -4, -6, 9, -9, 12, -12$ – нет. Вычисляем $f(3)$ и $f(-3)$ по схеме Горнера. Если получается нуль, то вычисляем значение частного от 6.

	1	-2	-19	-24	-36
3	1	1	-16	-72	-252
-3	1	-5	-4	-12	0
6	1	1	2	0	

Итак, мы нашли два корня многочлена $f(x)$: $x_1 = -3$, $x_2 = 6$. По схеме Горнера получаем, что $f(x) = (x+3)(x-6)(x^2+x+2)$. Осталось найти корни многочлена $h(x) = x^2 + x + 2$, т.е. решить уравнение $x^2 + x + 2 = 0$. Так как дискриминат квадратного трехчлена отрицательный, последнее уравнение не имеет действительных, а потому и рациональных корней.

Найти рациональные корни многочлена
$f = 24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$.

Решение. В силу предложения, если этот многочлен имеет рациональные корни, то они имеют вид несократимых дробей $\frac{p}{q}$, где $p|6$ (берем все делители), $q|24$ (берем только положительные делители). Подставляем в многочлен те дроби, для которых $p+q$ делит $f(-1) = -21$ и $p-q$ делит $f(1) = 15$. Числа p и q берем из таблицы, минус означает, что дробь подставлять не нужно. Строки, соответствующие делителям 6, 8, 12, 24 в таблице не приведены, так как не используются при нахождении корней.

$q\backslash p$	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
1	-	-	?	?	-	-	?	-
2	?	-	-	-	-	?	-	-
3	-	-	-	?	-	-	?	-
4	-	?	-	-	?	-	-	-

Значения многочлена вычисляем по схеме Горнера в одной таблице на следующем слайде.

Окончание решения примера 2

	24	10	-1	-19	-5	6	
2	24	58	115	211	417	840	не корень
-2	24	-38	75	-169	333	-660	не корень
6	24	154	923	5519	33109	198660	не корень
$\frac{1}{2}$	24	22	10	-14	-12	0	корень
	12	11	5	-7	-6		сократили на 2
$-\frac{3}{2}$	12	-7	$\frac{31}{2}$	$-\frac{165}{4}$	$\frac{543}{8}$		не корень
$-\frac{2}{3}$	12	3	3	-9	0		корень
	4	1	1	-3			сократили на 3
$-\frac{1}{4}$	4	0	-1	$-\frac{11}{4}$			не корень
$\frac{3}{4}$	4	4	4	0			корень

Имеем
$f=(x-\frac{1}{2})(24x^4+22x^3+10x^2-14x-12)=(2x-1)(12x^4+11x^3+5x^2-7x-6)=(2x-1)(x+\frac{2}{3})(12x^3+3x^2+3x-9)=(2x-1)(3x+2)(4x^3+x^2+x-3)=(2x-1)(3x+2)(x-\frac{3}{4})(4x^2+4x+4)=(2x-1)(3x+2)(4x-3)(x^2+x+1)$.

Так как многочлен x^2+x+1 не имеет действительных корней, рациональные корни многочлена f есть $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$.

Определение

Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ называется *примитивным*, если $f \neq 0$ и наибольший общий делитель всех коэффициентов многочлена f равен 1.

Очевидно, что для любого $g \in \mathbb{Z}[x]$, $g \neq 0$, существует единственный примитивный многочлен f такой что $g = mf$, где m – наибольший общий делитель всех коэффициентов многочлена g.

Лемма Гаусса

Произведение двух примитивных многочленов является примитивным многочленом.

$\Downarrow$Пусть $f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_k x^k$ и $g = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n$ – примитивные многочлены. Пусть p – простое число. Поскольку f – примитивный многочлен, существует наименьший индекс ℓ такой что p не делит α_ℓ (возможно $\ell = 0$). Аналогично, существует наименьший индекс m такой что p не делит β_m (возможно $m = 0$). Тогда p не делит $\alpha_\ell \beta_m$. Коэффициент γ при $x^{\ell+m}$ в h равен $\sum_{s+t=\ell+m} \alpha_s \beta_t$. В этой сумме все слагаемые, кроме $\alpha_\ell \beta_m$, если они присутствуют, делятся на p, так как при $s > \ell$ $t < m$ и при $t > m$ $s < \ell$. Следовательно, γ не делится на p. Таким образом, h – примитивный многочлен. Лемма доказана.$\Uparrow$

Неприводимость многочлена над кольцом $\mathbb{Z}$ определяется аналогично неприводимости над полем (сл.18 т.1-9).

Теорема

Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда он неприводим над кольцом $\mathbb{Z}$.

$\Downarrow$Так как $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, очевидно, что из неприводимости многочлена $f \in \mathbb{Z}[x]$ над полем $\mathbb{Q}$ следует его неприводимость над кольцом $\mathbb{Z}$. Пусть многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим над кольцом $\mathbb{Z}$ и пусть $f = gh$, где $g, h \in \mathbb{Q}[x]$. Тогда легко понять, что $g = \frac{m}{n} g_1$, $h = \frac{\ell}{k} h_1$, где $m, n, \ell, k \in \mathbb{N}$, $g_1, h_1 \in \mathbb{Z}[x]$ – примитивные многочлены. По лемме Гаусса (сл.15) произведение $g_1 h_1$ – примитивный многочлен. Так как $f = gh$, по этой причине в произведении дробей $\frac{m}{n} \cdot \frac{\ell}{k}$ знаменатели сокращаются с числителями, и указанное произведение – натуральное число. Обозначим его через q. Имеем $f = (qg_1)h_1$ – произведение двух многочленов из $\mathbb{Z}[x]$. Из неприводимости f над кольцом $\mathbb{Z}$ следует, что $\deg(qg_1) = 0$ или $\deg(h_1) = 0$. В первом случае имеем $\deg(g) = 0$, а во втором – $\deg(h) = 0$. Следовательно, f неприводим над полем $\mathbb{Q}$. Теорема доказана.$\Uparrow$

В силу теоремы сл.16 проблема выяснения неприводимости многочленов из $\mathbb{Q}[x]$ над полем $\mathbb{Q}$ полностью сводится к соответствующей проблеме для многочленов из $\mathbb{Z}[x]$ над кольцом $\mathbb{Z}$. Простого утверждения, дающего необходимые и достаточные условия неприводимости многочлена из $\mathbb{Z}[x]$ над кольцом $\mathbb{Z}$, не существует. Приведем одно достаточное условие.

Теорема (признак Эйзенштейна)

Пусть многочлен $f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_k x^k \in \mathbb{Z}[x]$. Если существует простое число p, которое делит коэффициенты $\alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_0$, но не делит α_k и p^2 не делит α_0, то многочлен f неприводим над полем $\mathbb{Q}$.

$\Downarrow$От противного, ввиду теоремы сл.16, предположим, что $f = gh$, где $g = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m$, $h = \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_n x^n$ – многочлены из $\mathbb{Z}[x]$ и $\deg(g), \deg(h) < \deg(f)$. Тогда $\alpha_s = \sum_{j+\ell=s} \beta_j \gamma_\ell$ при $s = 0, 1, \ldots, k$ и $k = m + n$. Так как p делит $\alpha_0 = \beta_0\gamma_0$, а p^2 не делит α_0, заключаем, что лишь одно из чисел β_0, γ_0 делится на p. Для определенности пусть β_0 делится на p, а γ_0 не делится на p. Так как $\alpha_1 = \beta_0\gamma_1 + \beta_1\gamma_0$, заключаем, что $\beta_1\gamma_0 = \alpha_1 - \beta_0\gamma_1$ делится на p, и следовательно β_1 делится на p. Индукцией по j покажем, что β_j делится на p при $j = 0, 1, \ldots, m$. Предположим, что уже доказано, что $\beta_0, \ldots, \beta_{j-1}$ делятся на p. Так как $\alpha_j = \sum_{q+\ell=j} \beta_q\gamma_\ell$, имеем $\beta_j\gamma_0 = \alpha_j - \sum_{q+\ell=j, q<j} \beta_q\gamma_\ell$, откуда следует требуемое. Таким образом, β_m делится на p, и потому $\alpha_k = \beta_m\gamma_n$ делится на p. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.$\Uparrow$

Непосредственное применение признака Эйзенштейна не представляет трудностей. Иногда удается сделать замену переменной так, что становится возможным применить признак Эйзенштейна. При этом используется следующее очевидное

Наблюдение

Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда для некоторого $r \in \mathbb{Z}$ многочлен $f(x-r)$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$.

Покажем, что многочлен $x^4+x^3+x^2+x+1$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$. Для этого сделаем замену $y=x-1$. Имеем

$$x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{x^5-1}{x-1}=\frac{(y+1)^5-1}{y}=y^4+5y^3+10y^2+10y+5.$$

Многочлен $y^4+5y^3+10y^2+10y+5$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$ согласно признаку Эйзенштейна (сл.17) с $p=5$, поэтому многочлен $x^4+x^3+x^2+x+1$ также неприводим над полем $\mathbb{Q}$.

Пусть F – поле. В силу теоремы Безу получаем, что если многочлен f из $F[x]$ имеет корень в поле F, то он является неприводимым тогда и только тогда, когда $\deg(f) = 1$.

Предложение

Пусть $f \in F[x]$, $\deg(f) = 2$ или $\deg(f) = 3$. Многочлен f является неприводимым тогда и только тогда, когда он не имеет корней в поле F.

$\Downarrow$В силу сказанного выше неприводимый многочлен степени выше первой не может иметь корней в поле F. Если многочлен f имеет степень 2 или 3, то отсутствие корней, равносильное тому, что многочлен не имеет делителей первой степени, влечет за собой неприводимость, так как при разложении f в произведение двух многочленов gh, где $\deg(g) < \deg(f)$ и $\deg(h) < \deg(f)$, степень по крайней мере одного из сомножителей должна быть равна 1.$\Uparrow$

Если степень многочлена больше трех, то многочлен, не имеющий корней в поле F, может быть приводимым над F. Например, многочлен $(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ не имеет действительных корней, но приводим над полем действительных (и даже рациональных) чисел.

Пусть f – многочлен степени n над полем F, $n \geq 1$ и пусть $\alpha \in F$. Очевидно, что имеет место равенство (называемое *разложением многочлена по степеням* $x - \alpha$)

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-\alpha) + \lambda_2(x-\alpha)^2 + \ldots + \lambda_n(x-\alpha)^n \tag{4}$$

для некоторых однозначно определенных элементов $\lambda_j \in F$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Чтобы найти значения λ_j, подставим в (4) вместо x элемент α, получим $\lambda_0 = f(\alpha)$. Затем продифферецируем равенство (4), получим

$$f'(x) = \lambda_1 + 2\lambda_2(x-\alpha) + \ldots + n\lambda_n(x-\alpha)^{n-1}. \tag{5}$$

Подставим в (5) вместо x элемент α, получим $\lambda_1 = f'(\alpha)$. Продолжая таким образом, получим (продифференцировав k раз) $f^{(k)}(x) = k!\lambda_k + (k+1)!\lambda_2(x-\alpha) + \ldots + n(n-1)\cdots(n-k+1)\lambda_n(x-\alpha)^{n-k}$, откуда, подставив вместо x элемент α, будем иметь $k!\lambda_k = f^{(k)}(\alpha)$ и $\lambda_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(\alpha)$. Теперь из (4) получается

Формула Тейлора для многочлена

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{1}{2}f''(\alpha)(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\alpha)(x-\alpha)^n.$$

Разложить многочлен $f(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 5$ по степеням $x - 2$.

Будем делить по схеме Горнера сначала многочлен $f(x)$ на $x - 2$, потом частное, и так далее.

	1	−4	1	2	−1	5
2	1	−2	−3	−4	−9	−13
2	1	0	−3	−10	−29	
2	1	2	−1	−12		
2	1	4	7			
2	1	6				
	1					

Имеем

$$f(x) = -13 + (x-2)(x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 9) = -13 + (x-2)(-29 + (x-2)(x^3 - 3x - 10)) = -13 + (x-2)(-29 + (x-2)(-12 + (x-2)(x^2 + 2x - 1))) = -13 + (x-2)(-29 + (x-2)(-12 + (x-2)(7 + (x-2)(x+4)))) = -13 + (x-2)(-29 + (x-2)(-12 + (x-2)(7 + (x-2)(6 + (x-2))))) = -13 - 29(x-2) - 12(x-2)^2 + 7(x-2)^3 + 6(x-2)^4 + (x-2)^5.$$

Коэффициенты при степенях $x - 2$ определяются как остатки при последовательном делении на этот многочлен.

Пусть F – поле.

Теорема

Для любых различных элементов $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ и произвольных элементов $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ поля F существует единственный многочлен $f \in F[x]$ такой что $\deg(f) \leq n$ и $f(\alpha_j) = \beta_j$ при всех $j = 0, 1, \dots, n$.

$\Downarrow$Запишем $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n$ с неопределенными коэффициентами. Равенство $f(\alpha_j) = \beta_j$ дает $\lambda_0 + \lambda_1\alpha_j + \ldots + \lambda_n\alpha_j^n = \beta_j$ при $j = 0, 1, \dots, n$. Получаем крамеровскую систему линейных уравнений относительно неизвестных $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, у которой главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

есть транспонированный определитель Вандермонда и потому отличен от нуля в силу предложения сл.35 т.1-7. По теореме Крамера (сл.46 т.1-7) рассматриваемая система имеет единственное решение, что и завершает доказательство.$\Uparrow$

Задача нахождения многочлена по его значениям называется *задачей интерполяции*. Она рассматривается в методах вычислений.

Разложение рациональной дроби в сумму простейших дробей

Определение

Рациональной дробью над полем F называется функция $f(x)/g(x)$, где $f(x), g(x) \in F[x]$ и $g(x) \neq 0$. Рациональная дробь $f(x)/g(x)$ называется *правильной*, если $\deg(f) < \deg(g)$. Рациональная дробь $f(x)/g(x)$ называется *простейшей*, если $f \neq 0$, $g = p^n$ – некоторая степень неприводимого многочлена p над полем F и $\deg(f) < \deg(p)$.

Теорема

Любая правильная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей. Это представление единственно с точностью до перестановки слагаемых.

$\Downarrow$Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма

Пусть $f(x)/g(x)$ – правильная дробь и $g = g_1g_2$, где $(g_1, g_2) = 1$. Тогда $f(x)/g(x) = f_1(x)/g_1(x) + f_2(x)/g_2(x)$, где $f_j(x)/g_j(x)$ $(j = 1, 2)$ – правильные дроби.

$\Downarrow$ Согласно теореме сл.12 т.1-9 существуют многочлены u_1, u_2 такие что $u_1g_1 + u_2g_2 = 1$. Умножив обе части этого равенства на f, получим $f = fu_1g_1 + fu_2g_2$. Разделим fu_1 на g_2 с остатком: $fu_1 = qg_2 + r$, $\deg(r) < \deg(g_2)$. Имеем $f = (qg_2 + r)g_1 + fu_2g_2 = rg_1 + (qg_1 + fu_2)g_2$. Так как $(qg_1 + fu_2)g_2 = f - rg_1$ и $\deg(f) < \deg(g) = \deg(g_1) + \deg(g_2)$, $\deg(r) < \deg(g_2)$, заключаем, что $\deg(qg_1 + fu_2) < \deg(g_1)$. Положим $f_1 = qg_1 + fu_2$ и $f_2 = r$. Тогда $f/g = (f_1g_2 + f_2g_1)/(g_1g_2) = f_1/g_1 + f_2/g_2$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Пусть f/g – ненулевая правильная дробь и $g = p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ – неприводимое разложение ее знаменателя. Применяя несколько раз лемму, получаем $f/g = f_1/p_1^{k_1} + \ldots + f_m/p_m^{k_m}$, где $\deg(f_j) < k_j\deg(p_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Окончание доказательства

Пусть h/p^k – правильная дробь, где p – неприводимый многочлен. Разделим h на p^{k-1} с остатком: $h = q_1 p^{k-1} + r_1$. Тогда $\deg(q_1) < \deg(p)$и $\deg(r_1) < (k-1)\deg(p)$. Разделим r_1 на p^{k-2} с остатком: $r_1 = q_2 p^{k-2} + r_2$. Тогда $\deg(q_2) < \deg(p)$ и $\deg(r_2) < (k-2)\deg(p)$. Продолжая эти действия, получим последовательность равенств $r_j = q_{j+1} p^{k-j-1} + r_{j+1}$, где $\deg(q_{j+1}) < \deg(p)$ и $\deg(r_{j+1}) < (k-j-1)\deg(p)$, $j = 2, \ldots, k-2$. Отсюда $h = q_1 p^{k-1} + q_2 p^{k-2} + \ldots + q_{k-1} p + r_{k-1}$ и
$h/p^k = q_1/p + q_2/p^2 + \ldots + q_{k-1}/p^{k-1} + r_{k-1}/p^k$. Существование представления правильной дроби в виде суммы простейших дробей доказано.

Для доказательства единственности достаточно заметить, что сумма простейших дробей не может быть равна нулю, если не все слагаемые взаимно уничтожаются. Если f/p^k – простейшая дробь с наибольшим показателем степени k из всех дробей суммы, то умножая эту сумму на $p^{k-1}P$, где P – общий знаменатель всех остальных простейших дробей (в частности, $(p, P) = 1$), получим равенство $f/p + q = 0$ для некоторого многочлена $q \neq 0$. Отсюда $fP = -pq$ и p делит fP, что противоречит условиям $(p, f) = 1$ (в силу $\deg(f) < \deg(p)$) и $(p, P) = 1$. Теорема полностью доказана.$\Uparrow$

Чтобы разложить правильную дробь $f(x)/g(x)$ в сумму простейших дробей, нужно разложить знаменатель на неприводимые множители над полем F, затем записать сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами в числителях. Приведя полученное выражение к общему знаменателю, можно определить значения неизвестных коэффицентов, либо составив для них систему линейных уравнений, либо подставляя вместо x конкретные числовые значения.

Представление правильных рациональных дробей в виде суммы простейших дробей над полем $\mathbb{R}$ играет важную роль при вычислении неопределенных интегралов от дробно-рациональных функций в математическом анализе.

Разложить дробь $\dfrac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}$ в сумму простейших дробей над полем $\mathbb{R}$.

Для того, чтобы разложить знаменатель на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$, находим рациональные корни знаменателя, используя предложение сл.10. Имеем $x^5-2x^3+2x^2-3x+2=(x-1)^2(x-2)(x^2+1)$. Тогда $\dfrac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}=\dfrac{\alpha}{x-1}+\dfrac{\beta}{(x-1)^2}+\dfrac{\gamma}{x-2}+\dfrac{\delta x+\lambda}{x^2+1}$. Приводим в правой части к общему знаменателю и записываем равенство числителей: $2x^4-10x^3+7x^2+4x+3=\alpha(x-1)(x-2)(x^2+1)+\beta(x-2)(x^2+1)+\gamma(x-1)^2(x^2+1)+(\delta x+\lambda)(x-1)^2(x-2)$. Так как многочлены равны, они принимают одинаковые значения при всех значениях x (в том числе комплексных, а также обращающих знаменатель дроби в нуль). Подставив $x=1$, получаем $6=6\beta$, и $\beta=1$. Подставив $x=2$, получим $135=45\gamma$ и $\gamma=3$. Подставив $x=i$ (комплексное число), получим $-2+14i=(2-4i)(\delta i+\lambda)$, откуда $\lambda+\delta i=\frac{-1+7i}{1-2i}=-3+i$ и $\lambda=-3$, $\delta=1$. Наконец, подставив $x=0$, найдем $\alpha=-2$. Итак,

$$\frac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}=-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-2}+\frac{x-3}{x^2+1}.$$