Тема 1-1: Введение. Метод математической индукции. Множества и операции над ними

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Краткое описание курса

Курс алгебры и геометрии изучается в течение 1-го и 2-го семестров. Он включает высшую алгебру, линейную алгебру и аналитическую геометрию. Можно использовать любые учебники для университетов, в названии которых есть указанные слова. Список литературы приведен на следующем слайде.

По курсу читаются лекции и проводятся практические занятия. Для записи лекций и практических занятий нужно завести две ОТДЕЛЬНЫЕ тетради. Ни в коем случае не следует записывать лекции и практические занятия подряд друг за другом в одной тетради. На практических занятиях решаются задачи и задаются домашние задания. Их можно записывать в одной тетради.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Любое издание.
2. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Любое издание.
3. Кострикин А.И. Основы алгебры. Любое издание.
4. Кострикин А.И. Линейная алгебра. Любое издание.
5. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. Любое издание.
6. Булатов А.А., Верников Б.М., Замятин А.П. Алгебра и геометрия. Изд-во УрГУ, Екатеринбург, 2001.
7. Овсянников А.Я. Линейная алгебра. Изд-во Гуманитарного ун-та, Екатеринбург, 2004.
8. Задачник по алгебре и геометрии для студентов первого курса. Изд-во УрГУ, Екатеринбург, 2004; 2010 (2-е изд).

Книги [1-5] — университетские учебники, [3] и [4] — учебники повышенного уровня (для МГУ). Учебник [6] содержит не весь необходимый материал по алгебре, а [7] – по высшей алгебре и геометрии. Задачник [8] используется на практических занятиях. Книги [7-8] доступны в виде pdf файлов в закладке "Книги"страницы А.Я.Овсянникова на сайте кафедры алгебры и фундаментальной информатики по адресу: http ://kadm.kmath.ru\pages.php?id=teachers.

О слайдах

Данный набор слайдов разбит на темы, нумеруемые двумя числами, первое из которых указывает номер семестра. Довольно часто приходится делать ссылки на утверждения, доказанные ранее. Эти ссылки делаются так: <утверждение> сл. n т. k-m означает ссылку на <утверждение> (теорему, предложение, следствие), сформулированное на слайде номер n темы k-m. Аналогично делаются ссылки на выделенные формулы. Если слайд, на который делается ссылка, находится в той же теме, то номер темы не указывается.

Определяемые понятия выделяются *курсивом и цветом*. Начало и конец доказательства выделяются символами $\Downarrow$ и $\Uparrow$ соответственно.

Числовые множества

Множество всех натуральных чисел обозначается через $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}.$$

Множество всех целых чисел обозначается через $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Множество всех рациональных чисел обозначается через $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Множество всех действительных (или вещественных) чисел обозначается через $\mathbb{R}$. Его строгое определение дается в курсе математического анализа.

На всех указанных множествах определены арифметические операции сложения и умножения, а также отношение порядка $\leq$.

Понятие о доказательстве

В математике некоторые утверждения принимаются в качестве исходных, не требующих доказательства. Они называются *аксиомами*. Остальные утверждения должны доказываться на основании аксиом и правил логики. Однако строгое изложение курса алгебры и геометрии на основе аксиом трудно для восприятия. Поэтому доказательства проводятся на определенном уровне строгости. Задача студента — привыкнуть к этому уровню, научиться понимать и проводить доказательства утверждений из курса алгебры и геометрии. Приведем пример.

Теорема

Корень квадратный из двух является иррациональным числом.

$\Downarrow$ От противного, предположим, что корень квадратный из двух является рациональным числом. Тогда его можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m, n — некоторые натуральные числа. Сократив числитель и знаменатель на наибольший общий делитель чисел m, n, получим несократимую дробь. Будем предполагать, что числа m, n взаимно просты. Так как $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, получаем $m^2 = 2n^2$. Следовательно, m делится на 2, т.е. $m = 2k$ для некоторого натурального числа k. Значит, $4k^2 = 2n^2$. Сократив обе части на 2, получаем $2k^2 = n^2$. Таким образом, n тоже делится на 2. Мы видим, что числа m и n имеют общий делитель 2. Получили противоречие с тем, что числа m, n взаимно просты. Доказательство от противного закончено.$\Uparrow$

Принцип математической индукции

Некоторые утверждения включают в себя переменные величины. Тогда можно сказать, что утверждение зависит от параметра. Например, утверждение "запись в десятичной системе счисления квадрата натурального числа n заканчивается цифрой c"(где $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$) зависит от параметров n и c.

Пусть $\mathcal{A}(n)$ — некоторое утверждение, зависящее от натурального параметра n и имеющее смысл для всех натуральных чисел n. Если $\mathcal{A}(1)$ выполняется (база индукции) и для любого натурального числа n из того, что $\mathcal{A}(n)$ выполняется, следует, что $\mathcal{A}(n+1)$ выполняется (шаг индукции), то $\mathcal{A}(m)$ справедливо для всех натуральных чисел m.

$\Downarrow$ Для доказательства обозначим через M множество всех натуральных чисел, для которых справедливо утверждение $\mathcal{A}$:
$M = \{n \in \mathbb{N} | \mathcal{A}(n)$ истинно$\}$. Тогда $1 \in M$ согласно базе индукции и для любого $n \in M$ также $n + 1 \in M$ в соответствии с шагом индукции. Следовательно, $M = \mathbb{N}$ (это аксиома индукции).$\Uparrow$

Пример

Для натурального числа n по определению $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ($n!$ читается эн факториал). По определению $1! = 1$. Полезное соглашение: $0! = 1$. Легко видеть, что $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$.

Утверждение

Доказать, что для любого натурального числа n имеет место формула

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

$\Downarrow$Утверждение $\mathcal{A}(n)$ состоит в том, что выполняется указанное в условии равенство. Проверяем его истинность при $n = 1$ (база индукции): $1 \cdot 1! = 2! - 1$ — верное равенство. Пусть утверждение выполняется для натурального числа n. Докажем его справедливость для числа $n+1$: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + (n+1) \cdot (n+1)! = (1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!) + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+2-1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+2)! - (n+1)! = (n+2)! - 1$. Таким образом, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+2)! - 1$. Шаг индукции доказан. $\Uparrow$

Теорема

Пусть $\mathcal{A}(n)$ — некоторое утверждение, зависящее от натурального параметра n и имеющее смысл для всех натуральных чисел n таких что $n \geq n_0$ при фиксированном $n_0 \in \mathbb{N}$. Если $\mathcal{A}(n_0)$ выполняется (база индукции) и для любого натурального числа $n > n_0$ из того, что $\mathcal{A}(k)$ выполняется для всех натуральных чисел k таких, что $n_0 \leq k < n$, следует, что $\mathcal{A}(n)$ выполняется (шаг индукции), то $\mathcal{A}(m)$ справедливо для всех натуральных чисел $m \geq n_0$.

$\Downarrow$ Пусть M — множество всех натуральных чисел, для которых выполняется утверждение $\mathcal{A}$: $M = \{n \in \mathbb{N} | \mathcal{A}(n)$ истинно$\}$. Предположим, что $M \neq \{n \in \mathbb{N} | n \geq n_0\}$. Тогда существует наименьшее натуральное число m, для которого $\mathcal{A}(m)$ не выполняется. Так как $\mathcal{A}(n_0)$ выполняется, имеем $m > n_0$. По выбору числа m для любого натурального k такого что $n_0 \leq k < m$ утверждение $\mathcal{A}(k)$ выполняется. Получаем противоречие: согласно шагу индукции $\mathcal{A}(m)$ должно выполняться. $\Uparrow$

Пример

Условие

Доказать, что для любого натурального $n > 4$ справедливо неравенство $2^n > n^2$.

$\Downarrow$ Поверяем базу индукции ($n = 5$): $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. При $n = 5$ утверждение справедливо.
Доказываем шаг индукции. Предположим, что для всех натуральных чисел $4 < k < n$ утверждение доказано, т.е. $2^k > k^2$. Тогда $2^{n-1} > (n-1)^2$,откуда $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2(n-1)^2$. Убедимся, что $2(n-1)^2 > n^2$. В самом деле, $2(n-1)^2 - n^2 = n^2 - 4n + 2$. Квадратный трехчлен $x^2 - 4x + 2$ имеет корни $2 \pm \sqrt{2}$, и при $x > 2 + \sqrt{2}$ этот трехчлен положителен. Так как $4 > 2 + \sqrt{2}$, при всех $n > 4$ выполняется $n^2 - 4n + 2 > 0$, что завершает доказательство. $\Uparrow$

Понятие множества

Это фундаментальное математическое понятие, которое в данном курсе строго не определяется. Мы используем интуитивное представление о множестве как совокупности объектов, объединяемых некоторым свойством. Нужно отметить, что не всякая мыслимая совокупность объектов является множеством. Строгое аксиоматическое построение теории множеств весьма сложно и не используется в дальнейшем. Множества состоят из элементов. Понятие элемента также строго не определяется.

Запись $x \in A$ означает, что x является элементом множества A.

Для обозначения множеств через элементы используются фигурные скобки. Так, $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество из n (различных) элементов $a_1, \ldots, a_n$, а $S = \{x \in T | \mathcal{P}(x)\}$ — множество всех таких элементов множества T, для которых справедливо утверждение $\mathcal{P}(x)$. Это утверждение может быть произвольным.

Полезным и важным является понятие пустого множества, которое не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\emptyset$. Пример пустого множества: $\{x \in \mathbb{N} | 2x = 3\} = \emptyset$. Это значит, что уравнение $2x = 3$ не имеет решений в множестве натуральных чисел.

Определение подмножества

Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B.

Обозначение: $A \subseteq B$ (читается A включается в B). Важно не путать символы $\subseteq$ и $\in$. Пустое множество по определению считается подмножеством любого множества. Примеры включения множеств:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}. \tag{1}$$

Определение равенства множеств

Множества A и B называются *равными*, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Это означает, что равные множества имеют одни и те же элементы.

Пример: $\{2, 3\} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

Включение $A \subseteq B$ называется *строгим* (и обозначается $A \subset B$), если $A \neq B$, т.е. существует элемент множества B, не принадлежащий множеству A. Все включения в (1) являются строгими.

Операции над множествами: объединение и пересечение

Будем предполагать, что все рассматриваемые множества являются подмножествами одного универсального множества, которое обозначим через U.

Объединение множеств

Объединением множеств A и B называется множество, каждый элемент которого является элементом множества A или элементом множества B (возможно, элементом каждого множества).

Обозначение: $A \cup B$. Запись определения:
$A \cup B = \{x \in U | x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Пересечение множеств

Пересечением множеств A и B называется множество, каждый элемент которого является элементом и множества A и множества B.

Обозначение: $A \cap B$. Запись определения: $A \cap B = \{x \in U | x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Из определений следует, что $A \cap B \subseteq A \cup B$. Если $A \neq \emptyset$ или $B \neq \emptyset$, то $A \cup B \neq \emptyset$; если $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$, то возможно, что $A \cap B = \emptyset$.

Операции над множествами: разность и дополнение

Разность

Разностью множеств A и B называется множество из всех элементов множеств A, которые не принадлежат B.

Обозначение: $A \backslash B$. Полное название: теоретико-множественная разность.

Дополнение

Дополнением множества A называется множество всех элементов универсального множества, каждый элемент которого не принадлежит A.

Обозначение: $\overline{A}$. Из определений следует, что $\overline{A} = U \backslash A$.

Симметрическая разность

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Обозначение: $A \triangle B$.

Законы алгебры множеств

Напомним, что через U обозначается универсальное множество.
Для любых множеств X, Y, Z справедливы равенства:
1. $X \cap X = X$, $X \cup X = X$.
2. $X \cap Y = Y \cap X$, $X \cup Y = Y \cup X$.
3. $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$, $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$.
4. $(X \cap Y) \cup X = X$, $(X \cup Y) \cap X = X$.
5. $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$, $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.
6. $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$.
7. $\overline{\overline{X}} = X$, $X \cup \overline{X} = U$, $X \cap \overline{X} = \emptyset$.
8. $X \cap U = X$, $X \cup U = U$.
9. $X \cap \emptyset = \emptyset$, $X \cup \emptyset = X$.
10. $\overline{U} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = U$.

Доказательства этих равенств проводятся с помощью понятия равенства множеств (сл. 12).

Декартово произведение двух множеств

Пусть X, Y — множества. *Упорядоченная пара* (x, y) состоит из элементов $x \in X$, $y \in Y$. Ее можно определить как множество $\{x, \{x, y\}\}$. По определению $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Определение

Декартовым произведением множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит множеству X, а второй — множеству Y.

Обозначение: $X \times Y$. Таким образом, $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$.

Декартово произведение нескольких множеств

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — множества, n — натуральное число. *Кортежем* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется упорядоченный набор элементов $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Его можно определить как множество $\{x_1, \{x_2, \{x_3, \ldots \{x_{n-1}, x_n\} \ldots\}$. По определению два кортежа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ равны тогда и только тогда, когда $n = k$ и $x_i = y_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

...

Декартовым произведением множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется называется множество всех кортежей, в которых i-й элемент принадлежит множеству X_i при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначение: $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Таким образом, $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in X_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Декартова степень множества

Если все множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$ равны множеству M, то их декартово произведение называется n-й *декартовой степенью* множества M и обозначается через M^n. Таким образом, $M^n = \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n \text{ раз}}$.

По определению $M^1 = M$, $M^2 = M \times M$.
Множество $\mathbb{R}^n$ используется в многих областях математики.