

Вопросы к экзамену по курсу «Алгебра и геометрия»
Зимняя сессия 2023-2024 уч. года
(группы КНМО-101,102,103)

1. Мощность конечного множества. Булеан множества. Мощность прямого произведения конечного числа конечных множеств и булеана n -элементного множества.
2. Размещения и перестановки. Транспозиции. Четные и нечетные перестановки, смена четности перестановки при транспозиции. Теорема о перечислении перестановок.
3. Сочетания. Биномиальные коэффициенты и их свойства.
4. Комплексные числа: определение, вложение действительных чисел в комплексные, алгебраическая форма записи комплексных чисел, комплексное сопряжение.
5. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Возведение комплексных чисел в степень и извлечение корней из них.
6. Строение общего решения системы линейных уравнений.
7. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений: приведение матрицы к ступенчатому виду, общая схема метода Гаусса и обоснование его корректности.
8. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений: случаи несовместной, определенной и неопределенной системы. Число свободных переменных в неопределенной системе. Метод Гаусса-Жордана в случае определенной системы.
9. Определители: определение, определители малых порядков, связь между перестановками и подстановками, 1-е свойство определителей (неизменяемость при транспонировании).
10. Определители: свойства со 2-го по 7-е.
11. 8-е и 9-е свойства определителей. Определитель треугольной матрицы. Вычисление определителя произвольной квадратной матрицы методом приведения к треугольному виду.
12. Определитель полураспавшейся матрицы. Определитель Вандермонда.
13. Крамеровские системы линейных уравнений. Теорема Крамера и следствия из нее.
14. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, критерий ортогональности векторов, ослабленный закон сокращения. Вычисление скалярного произведения векторов, длины вектора и угла между векторами по их координатам.
15. Векторное произведение векторов: определение, свойства, критерий коллинеарности векторов на языке векторного произведения, геометрический смысл векторного произведения. Вычисление векторного произведения по координатам векторов.
16. Смешанное произведение векторов: определение, свойства, критерий компланарности векторов, геометрический смысл смешанного произведения. Вычисление смешанного произведения по координатам векторов. Определение компланарности векторов по их координатам. Определение ориентации тройки векторов с помощью смешанного произведения.
17. Система координат, координаты точки. Деление отрезка в данном отношении.
18. Замена системы координат. Поворот системы координат на плоскости.
19. Общее и параметрические уравнения кривой на плоскости. Виды уравнений прямой на плоскости (параметрические, каноническое, по двум точкам, общее, с угловым коэффициентом, в отрезках).
20. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
21. Пучок прямых.
22. Полуплоскости, определяемые прямой.
23. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
24. Общее и параметрические уравнения поверхности. Виды уравнений плоскости (параметрические, каноническое, по трем точкам, общее, в отрезках).
25. Взаимное расположение двух плоскостей.
26. Пучок плоскостей.
27. Полупространства, определяемые плоскостью.
28. Расстояние от точки до плоскости.
29. Общие и параметрические уравнения кривой в пространстве. Виды уравнений прямой в пространстве (общие, параметрические, канонические, по двум точкам).

30. Взаимное расположение прямой и плоскости.
31. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
32. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
33. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
34. Многочлены от одной переменной: определение, операции, кольцо многочленов. Стандартная запись многочлена. Теорема о делении многочленов с остатком.
35. Наибольший общий делитель двух многочленов. Взаимно простые многочлены.
36. Многочлены как функции. Аппроксимация функций многочленами. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
37. Два понятия равенства многочленов. Связь между равенством многочленов как последовательностей и их равенством как функций.
38. Корни многочленов. Теорема Безу и следствие из нее.
39. Основная теорема алгебры и следствия из нее.
40. Лемма о модуле старшего члена и следствие о модуле корня. Существование действительных корней у многочленов нечетной степени над полем \mathbf{R} (аналитическое и алгебраическое доказательства).
41. Теорема Штурма. Число действительных корней многочлена над полем \mathbf{R} .
42. Рациональные корни многочленов над полем \mathbf{Q} .
43. неприводимые многочлены. Разложение многочлена на неприводимые множители.
44. Отделение кратных множителей. Неприводимые множители многочлена над полем \mathbf{R} и его производной. Алгоритм отделения кратных множителей многочлена над полем \mathbf{R} .
45. Неприводимые многочлены над полями \mathbf{C} и \mathbf{R} .
46. Лемма Гаусса. Эквивалентность неприводимости многочленов над кольцом \mathbf{Z} и над полем \mathbf{Q} . Критерий Эйзенштейна.
47. Алгоритм Кронекера.
48. Рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.