Курс «Математическая логика», 2020-2021 уч.г.

Направления: Математика. Компьютерная математика, Математика

Дополнительные задачи

Формулы логики высказываний

1. В одной местности расположены два города И и Л. Жители И всегда говорят правду, а жители города Л всегда лгут. Как, попав в один из этих городов, узнать у первого встречного название города? *(Учебн. пособие: Ю.М. Важенин. Множества, логика, алгоритмы).*

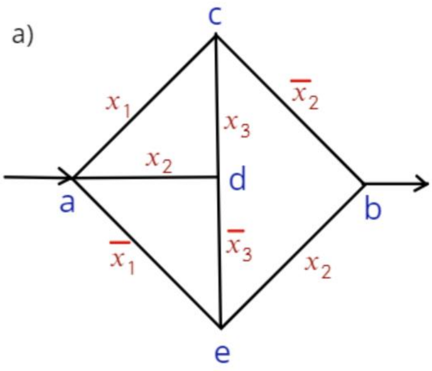
1.1. Студент сдаёт зачёт по предмету «Логика» на философском факультете. Он ничего не знает потому, что не учил. Профессор даёт ему последнее задание: «Если Вы, молодой человек, угадаете, сдадите ли Вы мне зачёт или нет, то я поставлю Вам зачёт, а если не угадаете, то не поставлю.» Что должен ответить студент, чтобы получить зачёт? (по мотивам задачи 12 из книги Смаллиана «Алиса в стране Смекалки».

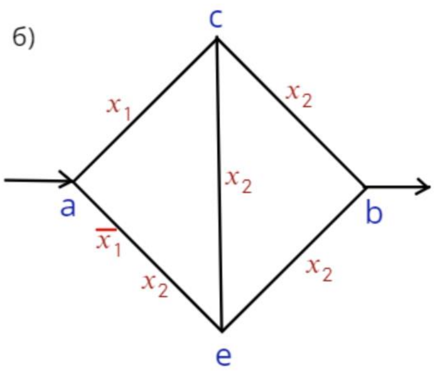
1.2. Найти условия, при которых ДНФ и КНФ булевой функции совпадают.

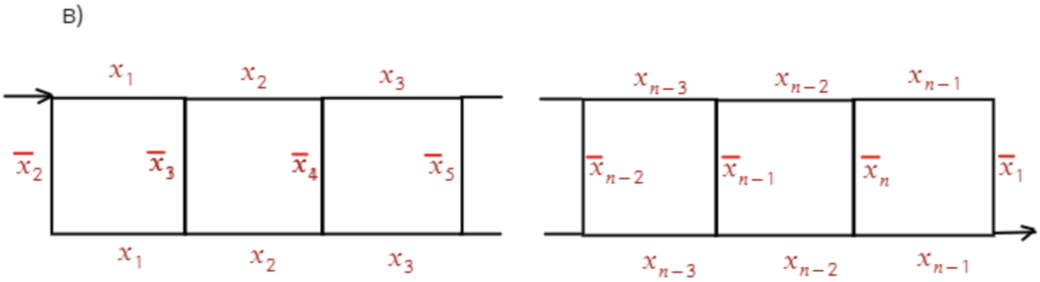
1.3. Может ли для булевой функции СДНФ совпасть со СКНФ?

1.4. Для каких булевых функций минимальная ДНФ совпадает со СДНФ?

2. Как составить электрическую схему из лампы, источника тока и двух переключателей так, чтобы изменение положения одного из переключателей изменяло бы состояние лампы на противоположное? *(Учебн. пособие: Ю.М. Важенин. Множества, логика, алгоритмы).*
3. Имеется одна лампочка в лестничном пролете трехэтажного здания. Постройте схему так, чтобы на каждом этаже своим выключателем можно было гасить и зажигать лампу независимо от положения другого выключателя? *(Учебн. пособие: Ю. Грибер., А.Егоров. Логика).*
4. Как составить электрическую схему из лампы, источника тока и n переключателей так, чтобы изменение положения одного из переключателей изменяло бы состояние лампы на противоположное? *(Авторская задача).*
5. По данным мостовым схемам построить наиболее простую релейно-контактную (параллельно-последовательную) схему.







5.1 В производстве задействованы три мотора, но только два из них могут работать в одно и то же время. Постройте наиболее простую релейно-контактную (параллельно-последовательную) схему, которая предотвращает включение более, чем двух моторов одновременно. (Р.Лидл, Г.Пильц. Прикладная абстрактная алгебра)

5.2 Нефтепровод снабжен тремя питающими его трубами. Постройте схему выключения нефтепровода в трех точках S_1, S_2, S_3, перекрывающих соответствующие трубы так, чтобы нефть протекала через нефтепровод при следующих условиях: S_1 и S_3 одновременно открыты или закрыты, но S_2 открыта, S_1 открыта, а S_2 и S_3 закрыты. (Р.Лидл, Г.Пильц. Прикладная абстрактная алгебра)

Аксиоматизируемые теории в логике высказываний

6. Доказать лемму $F \to F$.
7. Доказать

Следствия из теоремы о дедукции

1) $\vdash \neg\neg F \to F$ (или по ТД $\neg\neg F \vdash F$) (удаление $\neg$);
2) $\vdash F \to \neg\neg F$ (или по ТД $F \vdash \neg\neg F$) (введение $\neg$);
3) $\vdash (\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$ (или по ТД $(\neg G \to \neg F) \vdash (F \to G)$) (контрапозиция);
4) $\vdash (F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$ (или по ТД $F \to G \vdash \neg G \to \neg F$);
5) $\vdash \neg F \to (F \to G)$ (или по ТД $\neg F, F \vdash G$) (из лжи следует всё, что угодно);
6) $\vdash F \to (\neg G \to \neg (F \to G))$ (или по ТД $F, \neg G \vdash \neg (F \to G)$)) (отрицание импликации);
7) $\vdash (F \to G) \to ((\neg F \to G) \to G)$ (или $(F \to G), (\neg F \to G) \vdash G$);

$F \to G, G \to H \vdash F \to H$ (правило силлогизма)

Булевы функции

8. Выразить через функции класса $K_2=\{x\cdot y, \nu(x)\}$ и $K_3=\{x\vee y, \nu(x)\}$ следующие функции $f(x,y)=x\leftrightarrow y$; $g(x,y)=x\oplus y$; $h(x,y,z)=(x\to y)\to z$
9. Найти полином Жегалкина для следующих функций $x\to y$; $(x\to y)\to z$; $(x\oplus y)\leftrightarrow \nu(x)$; $\max(x,y,z)$.
10. Найти количество булевых функций от *n* переменных в каждом из основных замкнутых классов (кроме класса монотонных функций).
11. Доказать, что штрих Шеффера и стрелка Пирса являются единственными полными одноэлементными классами.

$\nu(x)$ *– обозначение для отрицания x,* $\theta(x)$ *– обозначение для константы 0,* $\iota(x)$ *– обозначение для константы 1.*

Логика предикатов

12. Изобразить на плоскости область истинности предиката $P(x,y)$, если $$(P(x,y)=1)\Leftrightarrow\left(\left(y\le x^2-2x+2\right)\to(y\le x)\right)$$ Найти также область истинности предикатов $\forall x\,P(x,y)$, $\exists x\,P(x,y)$, $\exists y\,P(x,y)$, $\exists y\,P(x,y)$, а также выяснить истинность значения высказываний $\forall x\forall y\,P(x,y)$, $\exists x\exists y\,P(x,y)$, $\forall x\exists y\,P(x,y)$, $\exists x\forall y\,P(x,y)$, $\forall y\exists x\,P(x,y)$, $\exists y\forall x\,P(x,y)$.
13. Проверить логичность рассуждения. Если рассуждение логично, доказать методом резолюций.
    Сорит Льюиса Кэрролла. Котенок, который любит рыбу, поддаётся дрессировке. Котенок без хвоста не станет играть с гориллой. Котята с усами всегда любят рыбу. У котенка, поддающегося дрессировке, не бывает зеленых глаз. Если у котенка нет хвоста, то у него нет и усов. Следовательно, ни один котенок с зелеными глазами не станет играть с гориллой. *(Взять в качестве основного множества множество котят).*
14. **Доказать при помощи метода резолюций логичность рассуждения.**
    (1) Из всех птиц только страусы достигает 9 футов роста. (2) В этом птичнике нет птиц, которые принадлежали бы кому-нибудь, кроме меня.(3) Ни один страус не питается пирогами с начинкой. (4) У меня нет птиц, которые бы не достигали 9 футов роста. (5) Следовательно, ни одна птица в этом птичнике не питается пирогами с начинкой. Взять в качестве основного множества множество птиц.
15. **Решить задачу при помощи метода резолюций.**
    Клуб Гуфера (пример Чарльза Майера). Используется многосортная логика. Тони, Шио-Куо и Элен – члены клуба Гуфера. Каждый член клуба, или лыжник, или альпинист, или является и тем и другим. Нет альпинистов, которые любят дождь, и все лыжники любят снег. Элен не любит то, что любит Тони и любит то, что Тони не

любит. Тони любит дождь и снег. Есть ли в клубе человек, являющийся альпинистом и не являющийся лыжником?

Аксиоматизируемые теории в логике предикатов

16. Задача I (ИВ, повторение) (Законы Де Моргана). Доказать, что
   $\overline{A \wedge B} \vdash \overline{A} \vee \overline{B}$ и $\overline{A} \vee \overline{B} \vdash \overline{A \wedge B}$
   Указание: воспользоваться определениями конъюнкции и дизъюнкции.
   $A \vee B = \overline{A} \to B$
   $A \wedge B = \overline{\overline{A} \to B}$
17. Задача II (ИВ, повторение) (Законы Де Моргана). Доказать, что
   $\overline{A \vee B} \vdash \overline{A} \wedge \overline{B}$ и $\overline{A} \wedge \overline{B} \vdash \overline{A \vee B}$
   Указание: воспользоваться определениями конъюнкции и дизъюнкции и следствиями 1-4 из теоремы о дедукции (задача 7).
18. Задача III (ИВ, повторение) (Приведение к абсурду). Доказать, что
   $(A \to B), (A \to \overline{B}) \vdash \overline{A}$
   Указание: применить аксиому А3 конъюнкции и дизъюнкции и следствиями 1-2 из теоремы о дедукции (задача 7).

Опр. Аксиомой теории **K** называется каждая из формул:

(А1) $F \to (G \to F)$;

(А2) $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$;

(А3) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$;

где F, G, H – формулы теории **K**.

(А4) $(\forall x)(F \to G) \to (F \to (\forall x)G)$,

где F не содержит свободных вхождений x.

(А5) $(\forall x)F(x) \to F(t)$,

где t – терм, свободный для x в $F(x)$, т.е $F(t)$ получена из $F(x)$ заменой свободных вхождений x на t, и в $F(t)$ во всех вхождениях t нет связанных переменных.

В частности, t может совпадать с x.

Определение. Правилами вывода в теории **K** называются: правило *modus ponens* и правило обобщения.

(mp): $\dfrac{F,\ (F \to G)}{G}$, (gen): $\dfrac{F}{(\forall x)F}$.

Лемма о замене. Если ФЛВ $\varphi(F_1, \dots, F_n)$ выводима логике высказываний, где $F_1,\dots,F_n$ - ФЛВ, то $\varphi(G_1, \dots, G_n)$ выводима в логике предикатов, где $G_1,\dots,G_n$ – ФЛП.

<u>Обобщённая теорема о дедукции для ИП</u>. Пусть Γ - множество (возможно, пустое) ФЛП. Тогда если существует такой вывод формулы G из множества формул $\Gamma \cup \{F\}$ в котором ни при каком применении *правила обобщения* к формулам, зависящим в этом выводе от формулы F, не связывается ни одна из свободных переменных формулы F, то $\Gamma \vdash F \to G$.

<u>Задача (*)</u>. Доказать: $(\forall x)F(x) \vdash (\forall y)F(y)$

<u>Доказательство</u>. $\forall x\ F(x) \vdash F(y)$ (A5, mp, t:= y) ; $F(y) \vdash \forall y\ F(y)$ (gen, mp).

19. Доказать, что $(\forall x)(\forall y)F(x,y) \vdash (\forall y)(\forall x)F(x,y)$.
<u>Указание:</u> сначала два раза применить A5 и mp, а затем два раза generous.

<u>Задача (**)</u> (двойственная к A5).
Доказать, что $F(t) \vdash \exists x\, F(x)$, где t – терм и в терме t нет связанных в F переменных.
<u>Доказательство</u>.

$$\vdash \forall x \overline{F(x)} \to \overline{F(t)} \qquad (A5)$$

$$\vdash \overline{\overline{F(x)}} \to \overline{\forall x \overline{F(t)}} \qquad (\text{следствие 4 из ТД})$$

$$\vdash F(t) \to \overline{\overline{F(t)}} \qquad (\text{следствие 2 из ТД})$$

$$\vdash F(t) \to \underbrace{\overline{\forall x \overline{F(x)}}}_{\exists x F(x)} \qquad (\text{правило силлогизма})$$

20. Доказать, что $\exists x\ F(x) \vdash (\exists y)F(y)$.
Указание: воспользоваться *задачей* (*) и следствиями 1-4 из ТД.
21. (Двойственная к задаче 19). Доказать, что $(\exists x)\ (\exists y)F(x,y) \vdash (\exists y)(\exists x)F(x,y)$.
<u>Указание:</u> воспользоваться задачей 17 и следствиями 1-4 из ТД.
22. Доказать, что $\forall x\ F(x) \vdash \exists x\ F(x)$.
<u>Указание:</u> использовать A5 и задачу (**).

<u>Определение.</u> $\exists x\ A(x) = \overline{\forall x\ \overline{A(x)}}$
23. Доказать, что $\overline{\exists x\ F(x)} \vdash \forall x\ \overline{F(x)}$.
<u>Указание:</u> воспользоваться определением квантора существования, следствиями 1,2 из теоремы дедукции и правилом силлогизма.
24. Доказать, что $\forall x\ \overline{F(x)} \vdash \overline{\exists x\ F(x)}$.
<u>Указание:</u> воспользоваться определением квантора существования, следствиями 1,2 из теоремы дедукции и правилом силлогизма.
25. Доказать, что $(\exists x)\ (\forall y)F(x,y) \vdash (\forall y)(\exists x)F(x,y)$.
<u>Указание:</u> воспользоваться определением квантора существования, generous, A5 и следствиями 3,4 из теоремы дедукции.