Определение компакта

Опр. Множество D называется компактом, если оно ограничено и замкнуто.

Примеры. (1) отрезок на прямой, (2) круг, квадрат, треугольник на плоскости; (3) куб, шар, цилиндр в пространстве – компакты.

Теорема Вейерштрасса для непрерывной Ф2П на компакте

Теорема 2 (Вейерштрасса). Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна на компакте, то она достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.

Без док-ва.

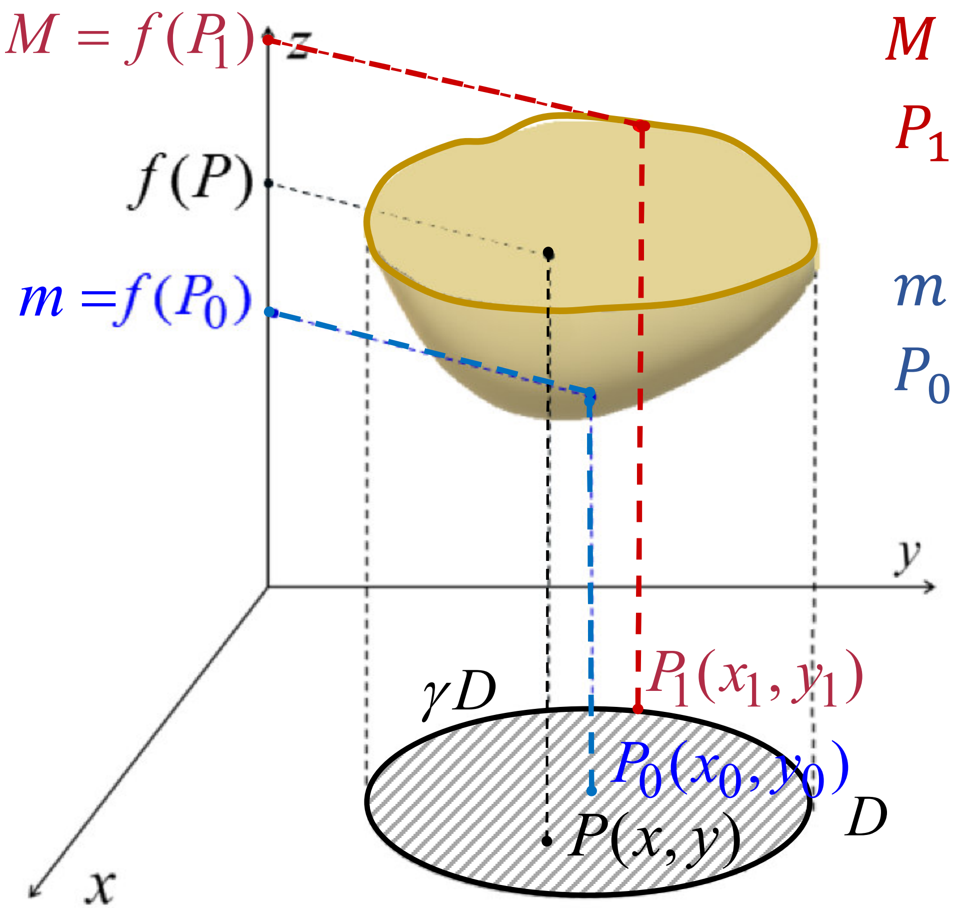
Наибольшее и наименьшее значение дифференцируемой Ф2П на компакте

Теорема 3. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема на компакте D, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значений

- либо в стационарной точке внутри множества D,
- либо на границе γD множества D.

Без док-ва.

Наиб. и наим. значение дифференцируемой Ф2П на компакте (иллюстрация)



$M =$ наиб. $f(x, y) = f(P_1)$

$P_1 \in \gamma D$

$m =$ наим. $f(x, y) = f(P_0)$

P_0 – стационарная точка внутри D

Схема поиска наиб. (наим.) значения дифференцируемой ФНП на компакте

1. Найти стационарные точки P_0 функции $z = f(x, y)$, лежащие внутри компакта D и вычислить значения $f(P_0)$ функции в них.

2. Найти m_γ и M_γ наименьшее и наибольшее значения $z = f(x, y)$ на границе γD области.

3. Выбрать $m = \min\left\{m_\gamma, f\left(P_0\right)\right\}$

$$M = \max\left\{M_\gamma, f\left(P_0\right)\right\}$$

Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1

Пример 1. Найти размеры прямоугольного параллелепипеда данного периметра, имеющего наибольший объем.

Решение.

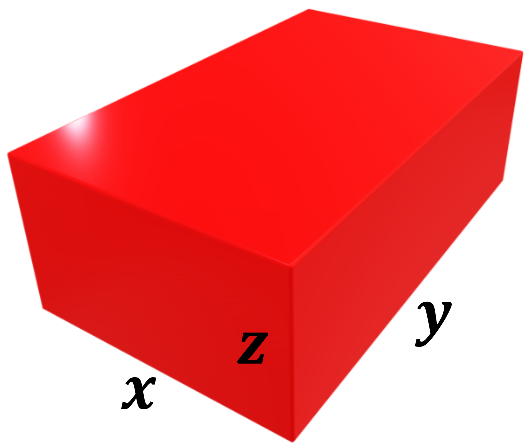
$$V = xyz \to \max,\ P = 4(x+y+z) = const,\ a = \frac{P}{4} \Rightarrow$$

$$x + y + z = a \Rightarrow z = a - x - y,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \Rightarrow$$

Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1

$$f(x,y) = xy(a-x-y) \to \max$$

$$D:\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ a-x-y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le a-x \end{cases}$$



Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1

$$1)\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\big(xy(a-x-y)\big)=[y=\mathrm{const}]=$$

$$=y\frac{\partial}{\partial x}\big(x(a-x-y)\big)=$$

$$=y\left(\frac{\partial}{\partial x}(x)(a-x-y)+x\frac{\partial}{\partial x}(a-x-y)\right)=$$

$$=y\big(a-x-y+x(-1)\big)=y(a-2x-y)=0$$

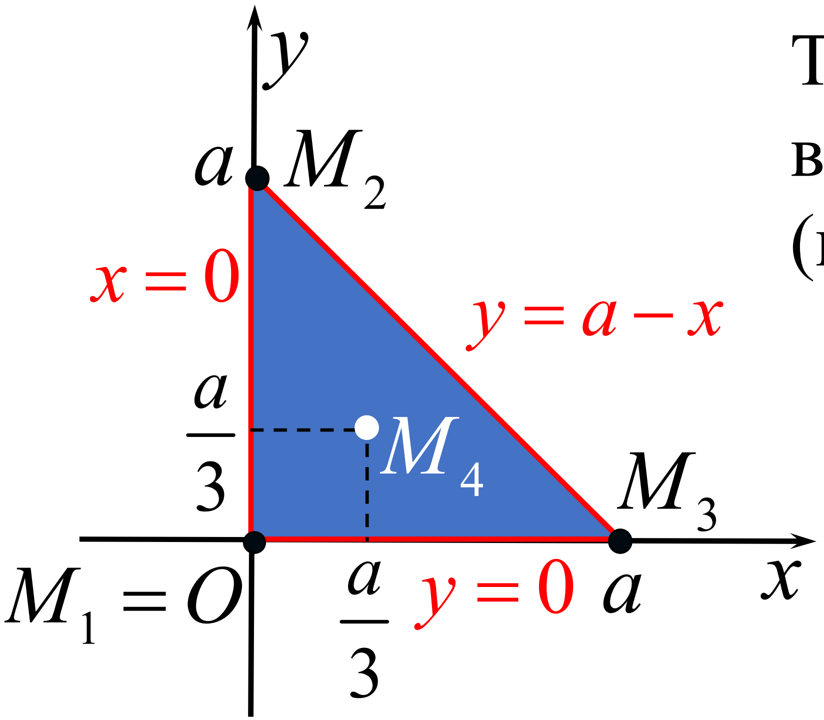
$$\frac{\partial f}{\partial y}=x(a-2y-x)=0 \quad \text{(аналогично)}$$

Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1

Получаем систему: $\begin{cases} y(a-2x-y)=0 \\ x(a-2y-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_1(0,0) \\ \begin{cases} a-2x-y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_2(0,a) \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ a-2y-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_3(a,0) \\ \begin{cases} a-2x-y=0 \\ a-2y-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_4\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right) \end{array}\right.$$

Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1



Т-ки M_1, M_2 M_3 не лежат внутри компакта D (принадлежат границе γD).

Т. $M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ лежит внутри компакта D.

$$f(M_4) = f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}$$

Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1

2). $\gamma D: x=0,\ y=0,\ y=a-x$

$$x=0 \Rightarrow f = xy(a-x-y)=0$$

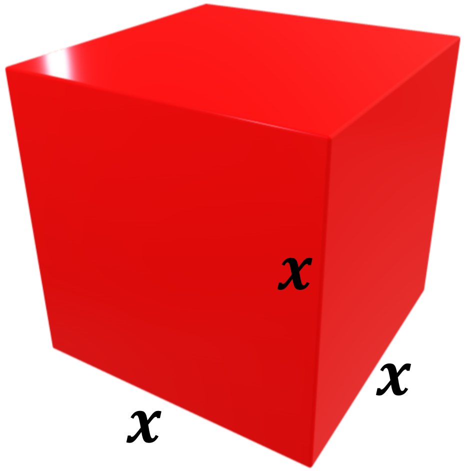
$$y=0 \Rightarrow f=0$$

$$y=a-x \Rightarrow f=0$$

3). наиб. $f(x,y)=\dfrac{a^3}{27}$ достигается

в точке $M_4\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$

Наиб. (наим.) значения ФНП на компакте. Пример 1



$$x = y = z = \frac{a}{3} \Rightarrow$$ параллелепипед - КУБ