УДК 512.532.2

О многообразиях полугрупп, на свободных объектах которых почти все вполне инвариантные конгруэнции слабо перестановочны*

Б. М. Верников

В универсальной алгебре значительное внимание уделяетя рассмотрению *конгруэнц-перестановочных* и *слабо конгруэнц-перестановочных* многообразий, т. е. многообразий, на всех алгебрах которых любые две конгруэнции α и β, соответственно, *перестановочны* (удовлетворяют равенству $\alpha\beta = \beta\alpha$) или *слабо перестановочны* (удовлетворяют равенству $\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta$). Важность этих классов многообразий в немалой степени определяется тем, что конгруэнц-перестановочными являются все многообразия групп и колец. Но применительно к многообразиям еще одного классического типа алгебр — полугрупп — условия конгруэнц-перестановочности и слабой конгруэнц-перестановочности оказываются слишком жесткими и существенного интереса не представляют. Говоря это, мы имеем в виду следующий хорошо известный факт: многообразие полугрупп слабо конгруэнц-перестановочно тогда и только тогда, когда оно состоит из периодических групп (это легко вытекает из результатов работы [10] и является частным случаем результатов, полученных в [12]; для конгруэнц-перестановочных многообразий аналогичный факт был доказан намного раньше в [16]).

Оказывается, однако, что условия конгруэнц-перестановочности и слабой конгруэнц-перестановочности можно естественным образом ослабить, потребовав выполнения соответствующих равенств не для всех конгруэнций на всех полугруппах из многообразия, а только для вполне инвариантных конгруэнций на полугруппах, свободных в многообразии. Как видно из результатов работ [13, 14], такого рода ослабленным условиям удовлетворяют уже

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00258) и межвузовской научной программы “Университеты России — фундаментальные исследования” Министерства образования Российской Федерации (проект № 04.01.059).

обширные и важные классы полугрупповых многообразий. В [13, 14, 20] и ряде более ранних работ разных авторов, в связи с изучением тождеств в решетках многообразий полугрупп, была выявлена важная роль многообразий полугрупп, на свободных объектах которых перестановочны или слабо перестановочны не все вполне инвариантные конгруэнции, а только те из них, которые содержатся в наименьшей полурешеточной конгруэнции (т. е. наименьшей конгруэнции, фактор-полугруппа по которой — полурешетка).

Для краткости назовем многообразия полугрупп, на всех свободных объектах которых любые две вполне инвариантные конгруэнции [содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции] перестановочны, [*почти*] *fi-перестановочными*, а многообразия полугрупп, на всех свободных объектах которых любые две вполне инвариантные конгруэнции [содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции] слабо перестановочны, — [*почти*] *слабо fi-перестановочными.* Условия почти fi-перестановочности и почти слабой fi-перестановочности, вообще говоря, не наследуются подмногообразиями (см. [18], пример 2.10) — в отличие от условий fi-перестановочности и слабой fi-перестановочности, наследственность которых вытекает из некоторых простых и весьма общих соображений (см. [18], лемма 1.1). Многообразия, все подмногообразия которых почти [слабо] fi-перестановочны, будем называть *наследственно почти* [*слабо*] *fi-перестановочными.* Отметим, что свободные объекты подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$ суть в точности относительно свободные полугруппы, принадлежащие $\mathcal{V}$. Поэтому наследственная почти [слабая] fi-перестановочность многообразия $\mathcal{V}$ эквивалентна тому, что на всех относительно свободных полугруппах из $\mathcal{V}$ (а не только на $\mathcal{V}$-свободных полугруппах) любые две вполне инвариантные конгруэнции, содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции, [слабо] перестановочны.

Описание fi-перестановочных и наследственно почти fi-перестановочных многообразий полугрупп получено в [18], а описание почти fi-перестановочных многообразий — в [19]. Автором описаны слабо fi-перестановочные многообразия, но в полном объеме этот результат пока не опубликован; различные его частные случаи см. в [1, 17].

Напомним, что многообразие полугрупп называется *вполне регулярным*, если оно состоит из *вполне регулярных* полугрупп (объединений групп). Аналогично, многообразие называется *вполне простым*, если оно состоит из вполне простых полугрупп, и *нильмногообразием*, если оно состоит из нильполугрупп. *Многообразием полугрупп с вполне регулярным квадратом* называется многообразие, квадрат всякой полугруппы которого является вполне регулярной полугруппой. Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ называется *многообразием индекса n*, если все нильполугруппы из $\mathcal{V}$ нильпотентны ступени $\leqslant n$, причем n — наименьшее число с таким свойством. Ясно, что вполне регулярные многообразия — это в точности многообразия индекса 1.

Простые и стандартные рассуждения позволяют установить, что всякое почти слабо fi-перестановочное многообразие полугрупп имеет модулярную решетку подмногообразий (см. лемму 3 ниже). Из этого факта и результатов М. В. Волкова [2, 3, 4, 5], вытекает, что всякое почти слабо fi-перестановочное многообразие либо имеет индекс $\leqslant 2$, либо в некотором смысле близко к нильмногообразиям. Из результатов работы [17] непосредственно вытекает описание слабо fi-перестановочных многообразий индекса $\leqslant 2$. В данной работе описаны почти слабо fi-перестановочные и наследственно почти слабо fi-перестановочные многообразия полугрупп индекса $\leqslant 2$.

Как обычно, мы обозначаем через $\operatorname{var}\Sigma$ многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ. Положим

$$\begin{aligned}&\mathcal{SL} = \operatorname{var}\{x^2 = x,\, xy = yx\}; \quad \mathcal{ZM} = \operatorname{var}\{xy = 0\};\\ &\mathcal{P} = \operatorname{var}\{xy = x^2y,\, x^2y^2 = y^2x^2\}; \quad \overleftarrow{\mathcal{P}} = \operatorname{var}\{xy = xy^2,\, x^2y^2 = y^2x^2\}.\end{aligned}$$

Символами $\vee$ и $\wedge$ будем обозначать, соответственно, объединение и пересечение в решетке всех многообразий полугрупп и в решетках конгруэнций.

Первым из основных результатов работы является

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп индекса $\leqslant 2$. Многообразие $\mathcal{V}$ почти слабо fi-перестановочно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) *$\mathcal{V}$ — вполне простое многообразие;*
2) *$\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом, содержащее $\mathcal{SL}$;*
3) *$\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{X}$, где $\mathcal{A}$ — многообразие периодических абелевых групп, а $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$;*
4) *$\mathcal{V} = \mathcal{ZM}$.*

Доказательство. **Необходимость.** Очевидно, что если $\mathcal{V} \not\supseteq \mathcal{SL}$, то наименьшей полурешеточной конгруэнцией на всякой $\mathcal{V}$-свободной полугруппе является универсальное отношение. Следовательно, имеет место

Лемма 1. *Если $\mathcal{V}$ — почти [слабо] fi-перестановочное многообразие полугрупп и $\mathcal{V} \not\supseteq \mathcal{SL}$, то $\mathcal{V}$ [слабо] fi-перестановочно.* □

В работе [17] доказана

Лемма 2. *Всякое слабо fi-перестановочное многообразие полугрупп является либо вполне регулярным многообразием, либо нильмногообразием.* □

Пусть теперь $\mathcal{V}$ — произвольное почти слабо fi-перестановочное многообразие полугрупп индекса $\leqslant 2$. Предположим сначала, что $\mathcal{V} \not\supseteq \mathcal{SL}$. В силу леммы 1 $\mathcal{V}$ слабо fi-перестановочно. Из леммы 2 вытекает теперь, что $\mathcal{V}$

либо вполне регулярно, либо является нильмногообразием. Ясно, что во втором случае $\mathcal{V} = \mathcal{ZM}$, т. е. выполнено условие 4) теоремы 1. Пусть теперь $\mathcal{V}$ вполне регулярно. В силу основного результата работы [17] $\mathcal{V}$ является либо вполне простым многообразием, либо многообразием полурешеток групп. Учитывая, что всякое многообразие полурешеток групп, не содержащее $\mathcal{SL}$, является многообразием периодических групп, мы получаем, что в обоих случаях выполнено условие 1) теоремы 1.

Всюду далее в доказательстве необходимости теоремы 1 *можно считать, что* $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$. Как обычно, мы будем обозначать через $L(\mathcal{V})$ решетку подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$. Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 3. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ почти слабо fi-перестановочно, то решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна.*

Доказательство. Хорошо известно, что многообразие $\mathcal{SL}$ является нейтральным элементом решетки всех многообразий полугрупп (это легко вытекает, например, из результатов работы [8]). Следовательно, решетка $L(\mathcal{V})$ вкладывается в прямое произведение решетки $L(\mathcal{SL})$ (которая, как хорошо известно, 2-элементна) и интервала $[\mathcal{SL} \wedge \mathcal{V}, \mathcal{V}]$ решетки $L(\mathcal{V})$. Поэтому достаточно убедиться в модулярности интервала $[\mathcal{SL} \wedge \mathcal{V}, \mathcal{V}]$. Этот интервал антиизоморфен решетке всех вполне инвариантных конгруэнций на $\mathcal{V}$-свободной полугруппе счетного ранга, содержащихся в наименьшей полурешеточной конгруэнции на этой полугруппе. В силу классических результатов Йонссона [11] (см. также, например, [7], §IV.4) всякая решетка, представимая слабо перестановочными отношениями эквивалентности, модулярна. Учитывая, что тождество модулярности самодвойственно, мы получаем, что интервал $[\mathcal{SL} \wedge \mathcal{V}, \mathcal{V}]$ модулярен. $\square$

Положим $\mathcal{Q} = \mathrm{var}\,\{xy = x^2y,\ xyz^2 = yxz^2,\ xyx = yx^2\}$ и $\overleftarrow{\mathcal{Q}} = \mathrm{var}\,\{xy = xy^2,\ x^2yz = x^2zy,\ xyx = x^2y\}$. Из результатов М. В. Волкова [4] (см. также [5]) непосредственно вытекает

Лемма 4. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп индекса $\leqslant 2$ и решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна, то выполнено одно из следующих условий:*

- (i) *$\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом;*
- (ii) *$\mathcal{V} = \mathcal{D} \vee \mathcal{E}$, где $\mathcal{D}$ — одно из многообразий $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, а $\mathcal{E}$ — вполне регулярное многообразие;*
- (ii′) *$\mathcal{V} = \mathcal{D}' \vee \mathcal{E}'$, где $\mathcal{D}'$ — одно из многообразий $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ и $\overleftarrow{\mathcal{Q}}$, а $\mathcal{E}'$ — вполне регулярное многообразие.* $\square$

Поскольку $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$, в случае (i) выполнено условие 2) теоремы 1. Проверим, что в случаях (ii) и (ii′) выполнено условие 3) этой теоремы. По соображениям симметрии достаточно доказать, что в случае (ii) $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{P}$, где $\mathcal{A}$ — многообразие периодических абелевых групп.

Обозначим через F абсолютно свободную полугруппу счетного ранга. Нам понадобится следующая лемма, легко проверяемая непосредственно.

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп такое, что $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$, а ν и σ — вполне инвариантные конгруэнции на F, отвечающие многообразиям $\mathcal{V}$ и $\mathcal{SL}$ соответственно. Многообразие $\mathcal{V}$ почти [слабо] fi-перестановочно тогда и только тогда, когда любые две вполне инвариантные конгруэнции на F, содержащие ν и содержащиеся в σ, [слабо] перестановочны.* $\square$

Для всякого слова $u \in F$ обозначим через $c(u)$ множество всех букв, входящих в запись u, через $t(u)$ — последнюю букву в записи u, через $\ell(u)$ — длину слова u, а через $\ell_x(u)$ [соответственно $\ell_i(u)$] — число вхождений буквы x [соответственно x_i] в слово u. Через $\equiv$ будем обозначать отношение равенства на F. Для всякого натурального $n > 1$ обозначим через $\mathcal{A}_n$ многообразие всех абелевых групп экспоненты n. Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма, пп. а)–в) которой хорошо известны и легко проверяются, а п. г) доказан в [6].

Лемма 6. *Тождество $u = v$ выполнено:*

а) *в многообразии $\mathcal{A}_n$ тогда и только тогда, когда $\ell_x(u) - \ell_x(v)$ делится на n для всякой буквы x;*

б) *в многообразии $\mathcal{SL}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$;*

в) *в многообразии $\mathcal{ZM}$ тогда и только тогда, когда либо u и v — одна и та же буква, либо $\ell(u), \ell(v) \geqslant 2$;*

г) *в многообразии $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$ и либо $\ell_{t(u)}(u)$, $\ell_{t(v)}(v) > 1$, либо $\ell_{t(u)}(u) = \ell_{t(v)}(v) = 1$ и $t(u) \equiv t(v)$.* $\square$

Пусть теперь $\mathcal{V} = \mathcal{D} \vee \mathcal{E}$, где $\mathcal{D}$ — одно из многообразий $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, а $\mathcal{E}$ — вполне регулярное многообразие. Хорошо известно, что всякое многообразие периодических полугрупп $\mathcal{X}$ содержит наибольшее вполне регулярное подмногообразие, которое мы будем обозначать через $\mathrm{CR}(\mathcal{X})$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{E} = \mathrm{CR}(\mathcal{V})$. Кроме того, $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{D} \supseteq \mathcal{P} \supseteq \mathcal{SL}$, и потому $\mathcal{E} \supseteq \mathcal{SL}$. Обозначим через ρ и ε вполне инвариантные конгруэнции на F, отвечающие многообразиям $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ соответственно. В силу леммы 5 конгруэнции ρ и ε слабо перестановочны. Ясно, что $\mathcal{P} \wedge \mathcal{E} = \mathrm{CR}(\mathcal{P}) = \mathcal{SL}$. В силу п. б) леммы 6 $(u, v) \in \rho \vee \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$. В частности, $(xy, yx) \in \rho \vee \varepsilon = \rho\varepsilon\rho$. Это означает, что $xy \mathrel{\rho} u \mathrel{\varepsilon} v \mathrel{\rho} yx$ для некоторых слов $u, v \in F$. В частности, $xy = u$ в $\mathcal{P}$. В силу п. г) леммы 6 это означает, что $c(u) = \{x, y\}$, $t(u) \equiv y$ и $\ell_y(u) = 1$. Следовательно, $u \equiv x^n y$ для некоторого натурального n. Аналогично, из того, что $v \mathrel{\rho} yx$ вытекает, что $v \equiv y^m x$ для некоторого натурального m. Но тогда в многообразии $\mathcal{E}$ выполнено тождество

$$x^n y = y^m x. \tag{1}$$

В частности, это означает, что $\mathcal{E}$ не содержит ни многообразия всех полугрупп левых нулей $\mathcal{LZ}$, ни многообразия всех полугрупп правых нулей $\mathcal{RZ}$. Следующий хорошо известный факт (см., например, [9, 15]) показывает, что $\mathcal{E} = \mathcal{A} \vee \mathcal{SL}$, где $\mathcal{A}$ — некоторое многообразие периодических групп.

Лемма 7. *Если вполне регулярное многообразие полугрупп не содержит многообразий $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$, то оно является либо групповым многообразием, либо объединением группового многообразия и многообразия $\mathcal{SL}$.* □

Далее, тождество (1) выполнено в любой группе из $\mathcal{V}$. Подставляя в это тождество 1 сначала вместо x, а затем вместо y, получаем, что любая группа из $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $y = y^m$ и $x^n = x$, а значит и тождеству $xy = yx$. Следовательно, $\mathcal{A}$ — многообразие периодических абелевых групп. Учитывая, что $\mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{Q}$, но $\mathcal{RZ} \nsubseteq \mathcal{A} \vee \mathcal{SL} = \mathcal{E} = \mathrm{CR}(\mathcal{V})$, получаем, что $\mathcal{Q} \nsubseteq \mathcal{V}$. Следовательно, $\mathcal{D} = \mathcal{P}$, и потому $\mathcal{V} = \mathcal{D} \vee \mathcal{E} = \mathcal{P} \vee \mathcal{A} \vee \mathcal{SL} = \mathcal{A} \vee \mathcal{P}$.

Достаточность. В работах [13] и [14] независимо доказано, что если многообразие полугрупп удовлетворяет условию 1) теоремы 1, то оно fi-перестановочно, а в [20] установлено, что многообразия, удовлетворяющие условию 2) этой теоремы, почти слабо fi-перестановочны. Случай, когда выполнено условие 4), очевиден: решетка $L(\mathcal{ZM})$ является 2-элементной цепью, и потому на всякой $\mathcal{ZM}$-свободной полугруппе любые две вполне инвариантные конгруэнции сравнимы по включению, а значит и перестановочны. Осталось рассмотреть случай, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 3) доказываемой теоремы.

По соображениям симметрии можно считать, что $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{P}$, где $\mathcal{A}$ — многообразие периодических абелевых групп. Следующее утверждение, проверенное в [18], позволяет далее считать, что многообразие $\mathcal{A}$ нетривиально, т. е. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$ для некоторого натурального $n > 1$.

Лемма 8. *Многообразие $\mathcal{P}$ наследственно почти fi-перестановочно.* □

Нам понадобится также следующий факт, доказанный независимо в [13] и [14].

Лемма 9. *Всякое вполне регулярное многообразие полугрупп почти fi-перестановочно.* □

Положим $\mathcal{K} = \mathrm{CR}(\mathcal{A}_n \vee \mathcal{P})$. Многообразие $\mathcal{A}_n \vee \mathcal{P}$ удовлетворяет тождествам

$$x^{n+1}y = xy, \tag{2}$$
$$x^{n+1}y^{n+1} = y^{n+1}x^{n+1}. \tag{3}$$

Тождество (3) показывает, что $\mathcal{K}$ не содержит многообразий $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$. В силу леммы 7 $\mathcal{K} = \mathcal{G} \vee \mathcal{SL}$, где $\mathcal{G}$ — наибольшее групповое подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$. Подставляя 1 вместо y в (2), получаем, что экспонента многообразия $\mathcal{G}$ делит n. С учетом (3) отсюда вытекает, что $\mathcal{G}$ абелево. Следовательно, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}_n$. Обратное включение очевидно, и потому $\mathcal{G} = \mathcal{A}_n$. Итак, $\mathcal{K} = \mathcal{A}_n \vee \mathcal{SL}$. Как хорошо известно, $L(\mathcal{A}_n \vee \mathcal{SL}) \cong L(\mathcal{A}_n) \times L(\mathcal{SL})$ (это легко вытекает, например, из результатов работы [8]). Следовательно, всякое вполне регулярное подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$, содержащее $\mathcal{SL}$, имеет вид $\mathcal{G} \vee \mathcal{SL}$, где $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}_n$. Обозначим через $\mathcal{T}$ тривиальное многообразие. В силу леммы 15 работы [4] всякое подмногообразие многообразия $\mathcal{A}_n \vee \mathcal{P}$ имеет вид $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$, где $\mathcal{X}$ — вполне регулярное многообразие, а $\mathcal{Y}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{ZM}$ и $\mathcal{P}$. Объединяя сказанное, получаем, что всякое подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$, содержащее $\mathcal{SL}$, является многообразием одного из следующих шести типов (где $\mathcal{G}$ — некоторое нетривиальное подмногообразие многообразия $\mathcal{A}_n$): $\mathcal{SL}$, $\mathcal{G} \vee \mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM} \vee \mathcal{SL}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM} \vee \mathcal{SL}$, $\mathcal{G} \vee \mathcal{P}$.

Пусть теперь α и β — вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F, отвечающие некоторым подмногообразиям многообразия $\mathcal{V}$, содержащим $\mathcal{SL}$. В силу леммы 5 достаточно показать, что α и β слабо перестановочны. Можно считать, что α и β несравнимы в решетке всех вполне инвариантных конгруэнций на F. Обозначим через ρ, σ и μ вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F, отвечающие многообразиям $\mathcal{P}$, $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{ZM}$ соответственно. С учетом сказанного выше о подмногообразиях многообразия $\mathcal{V}$, легко понять, что достаточно рассмотреть следующие девять случаев (через γ, γ_1 и γ_2 всюду ниже обозначаются вполне инвариантные конгруэнции на F, отвечающие нетривиальным подмногообразиям многообразия $\mathcal{A}_n$):

1) $\alpha = \gamma_1 \wedge \sigma$, а $\beta = \gamma_2 \wedge \sigma$;

2) $\alpha = \gamma \wedge \sigma$, а $\beta = \mu \wedge \sigma$;

3) $\alpha = \gamma \wedge \sigma$, а $\beta = \rho$;

4) $\alpha = \gamma_1 \wedge \sigma$, а $\beta = \gamma_2 \wedge \mu \wedge \sigma$;

5) $\alpha = \gamma_1 \wedge \sigma$, а $\beta = \gamma_2 \wedge \rho$;

6) $\alpha = \rho$, а $\beta = \gamma \wedge \mu \wedge \sigma$;

7) $\alpha = \gamma_1 \wedge \mu \wedge \sigma$, а $\beta = \gamma_2 \wedge \mu \wedge \sigma$;

8) $\alpha = \gamma_1 \wedge \mu \wedge \sigma$, а $\beta = \gamma_2 \wedge \rho$;

9) $\alpha = \gamma_1 \wedge \rho$, а $\beta = \gamma_2 \wedge \rho$.

Пусть $u, v \in F$ и $(u, v) \in \alpha \vee \beta$. Достаточно убедиться в том, что $(u, v) \in \alpha\beta\alpha$ и $(u, v) \in \beta\alpha\beta$. Поскольку $\alpha, \beta \subseteq \sigma$, из п. б) леммы 6 вытекает, что $c(u) = c(v)$. С учетом этого ясно, что если $\ell(u) = \ell(v) = 1$, то $u \equiv v$. Поэтому можно без ограничения общности считать, что $\ell(u) \geqslant 2$. Приступим к непосредственному рассмотрению перечисленных выше девяти случаев.

Случай 1: $\alpha = \gamma_1 \wedge \sigma$, а $\beta = \gamma_2 \wedge \sigma$. В этом случае конгруэнции α и β перестановочны в силу лемм 5 и 9.

Случай 2: $\alpha = \gamma \wedge \sigma$, а $\beta = \mu \wedge \sigma$. Если $\ell(v) \geqslant 2$, то, в силу п. в) леммы 6, $u \,\mu\, v$, и потому $u \,\beta\, v$. Поэтому можно считать, что $\ell(v) = 1$. Но тогда $v \equiv x$ и $u \equiv x^k$ для некоторой буквы x и некоторого натурального $k > 1$. Следовательно, $u \,\beta\, x^{n+1} \,\alpha\, v$, т. е. $(u, v) \in \beta\alpha$.

Случай 3: $\alpha = \gamma \wedge \sigma$, а $\beta = \rho$. Пусть x — произвольная буква, входящая в запись u. Используя п. г) леммы 6, имеем $u \,\alpha\, ux^n \,\beta\, vx^n \,\alpha\, v$, т. е. $(u, v) \in \alpha\beta\alpha$. Осталось показать, что $(u, v) \in \beta\alpha\beta$. Без ограничения общности можно считать, что $c(u) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Пусть $t(u) \equiv x_i$ и $t(v) \equiv x_j$. Если $\ell_i(u) > 1$, то, в силу п. г) леммы 6, $u\beta v x_i^n \alpha v$, т. е. $(u, v) \in \beta\alpha$. Аналогично проверяется, что если $\ell_j(v) > 1$, то $(u, v) \in \alpha\beta$. Наконец, если $\ell_i(u) = \ell_j(v) = 1$, то, вновь используя п. г) леммы 6, имеем

$$u \,\beta\, x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_m x_i \,\alpha\, x_1 \cdots x_{j-1} x_{j+1} \cdots x_m x_j \,\beta\, v,$$

т. е. $(u, v) \in \beta\alpha\beta$.

Случай 4: $\alpha = \gamma_1 \wedge \sigma$, а $\beta = \gamma_2 \wedge \mu \wedge \sigma$. Положим $\beta' = \gamma_2 \wedge \sigma$. Ясно, что $(u, v) \in \alpha \vee \beta'$. В силу лемм 5 и 9 конгруэнции α и β' перестановочны, и потому $(u, v) \in \beta'\alpha$, т. е. $u \,\beta'\, w \,\alpha\, v$ для некоторого слова $w \in F$. Ясно, что $u \,\beta'\, w^{n+1} \,\alpha\, v$ и $\ell(w^{n+1}) > 1$. Из п. в) леммы 6 вытекает, что $u \,\mu\, w^{n+1}$, и потому $u \,\beta\, w^{n+1} \,\alpha\, v$, т. е. $(u, v) \in \beta\alpha$.

Случай 5: $\alpha = \gamma_1 \wedge \sigma$, а $\beta = \gamma_2 \wedge \rho$. Здесь и в случае 9 нам понадобится следующая

Лемма 10. *Пусть γ_1 и γ_2 — вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F, отвечающие некоторым многообразиям периодических абелевых групп, $u, v \in F$, $(u, v) \in \gamma_1 \vee \gamma_2$ и $c(u) = c(v)$. Тогда существуют слова $w_1, w_2 \in F$ такие, что $u \,\gamma_2\, w_1 \,\gamma_1\, w_2 \,\gamma_2\, v$, $u \,\rho\, w_1$ и $w_2 \,\rho\, v$.*

Доказательство. Обозначим экспоненты групповых многообразий, отвечающих конгруэнциям γ_1, γ_2 и $\gamma_1 \vee \gamma_2$ через r, s и t соответственно. Ясно, что t — наибольший общий делитель чисел r и s. Без ограничения общности можно считать, что $c(u) = c(v) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Предположим, что $\ell_i(u) < \ell_i(v)$. В силу п. а) леммы 6 $\ell_i(v) - \ell_i(u) = g_i t$ для некоторого натурального числа g_i. Далее, $r = kt$ и $s = \ell t$ для некоторых взаимно простых натуральных чисел k и ℓ. Тогда существуют натуральные числа a_i и b_i такие, что $ka_i - \ell b_i = g_i$. Аналогично проверяется, что если $\ell_i(u) > \ell_i(v)$, то существуют натуральные числа h_i, c_i и d_i такие, что $\ell_i(u) - \ell_i(v) = h_i t$ и $kc_i - \ell d_i = h_i$.

Положим $u_0 \equiv u$, $v_0 \equiv v$ и для всякого $i = 1, 2, \ldots, m$ определим по индукции слова u_i и v_i следующим образом:

$$u_i \equiv \begin{cases} u_{i-1}, & \text{если } \ell_i(u) \leqslant \ell_i(v), \\ x_i^{d_i s} u_{i-1}, & \text{если } \ell_i(u) > \ell_i(v); \end{cases} \qquad v_i \equiv \begin{cases} v_{i-1}, & \text{если } \ell_i(v) \leqslant \ell_i(u), \\ x_i^{b_i s} v_{i-1}, & \text{если } \ell_i(v) > \ell_i(u). \end{cases}$$

Положим, наконец, $w_1 \equiv u_m$ и $w_2 \equiv v_m$. Очевидно, что $\ell_i(w_1)-\ell_i(u)$ и $\ell_i(w_2)-\ell_i(v)$ делятся на s для всякого $i \in \{1,2,\ldots,m\}$. В силу п. а) леммы 6 это означает, что $u\,\gamma_2\,w_1$ и $w_2\,\gamma_2\,v$. Проверим теперь, что $w_1\,\gamma_1\,w_2$. В силу п. а) леммы 6 требуется установить, что $\ell_i(w_1)-\ell_i(w_2)$ делится на r для всякого $i \in \{1,2,\ldots,m\}$. В самом деле, пусть $i \in \{1,2,\ldots,m\}$. Если $\ell_i(u)=\ell_i(v)$, то $\ell_i(w_1)=\ell_i(u)=\ell_i(v)=\ell_i(w_2)$ и $\ell_i(w_1)-\ell_i(w_2)=0$. Пусть теперь $\ell_i(u)>\ell_i(v)$. Тогда $\ell_i(w_1)=\ell_i(u)+d_is$ и $\ell_i(w_2)=\ell_i(v)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\ell_i(w_1)-\ell_i(w_2) &= \ell_i(u)-\ell_i(v)+d_is = h_it+d_is = \\ &= c_ikt-d_i\ell t+d_i\ell t = c_ikt = c_ir.\end{aligned}$$

Наконец, если $\ell_i(u)<\ell_i(v)$, то $\ell_i(w_1)=\ell_i(u)$ и $\ell_i(w_2)=\ell_i(v)+b_is$, и потому

$$\begin{aligned}\ell_i(w_1)-\ell_i(w_2) &= \ell_i(u)-\ell_i(v)-b_is = -g_it-b_is = \\ &= -a_ikt+b_i\ell t-b_i\ell t = -a_ikt = -a_ir.\end{aligned}$$

Мы показали,что $u\,\gamma_2\,w_1\,\gamma_1\,w_2\,\gamma_2\,v$.

Проверим теперь, что $u\,\rho\,w_1$. Из построения слова w_1 видно, что $c(u)=c(w_1)$ и $t(u)\equiv t(w_1)$. Пусть $t(u)\equiv x_i$. Если $\ell_i(u)=1$, то $\ell_i(u)\leqslant \ell_i(v)$, и потому $\ell_i(w_1)=\ell_i(u)=1$. Если же $\ell_i(u)>1$, то $\ell_i(w_1)\geqslant \ell_i(u)>1$. Из п. г) леммы 6 вытекает теперь, что $u\,\rho\,w_1$. Аналогично проверяется, что $w_2\,\rho\,v$. $\square$

Приступим к непосредственному рассмотрению случая 5. Положим $\beta'=\gamma_2\wedge\sigma$. Ясно, что $(u,v)\in\alpha\vee\beta'$. В силу лемм 5 и 9 конгруэнции α и β' перестановочны, и потому $(u,v)\in\alpha\beta'$, т. е. $u\,\alpha\,w\,\beta'\,v$ для некоторого слова $w\in F$. Пусть $x\in c(u)$. Тогда $wx^n\,\beta'\,vx^n$ и, в силу п. г) леммы 6, $wx^n\,\rho\,vx^n$. Следовательно, $wx^n\,\beta\,vx^n$. Но тогда $u\,\alpha\,ux^n\,\alpha\,wx^n\,\beta\,vx^n\,\alpha\,v$, т. е. $(u,v)\in\alpha\beta\alpha$.

Остается проверить, что $(u,v)\in\beta\alpha\beta$. Пусть $t(u)\equiv x_i$ и $t(v)\equiv x_j$. Если $\ell_j(v)>1$, то, в силу п. г) леммы 6, $wx^n\,\rho\,v$. Учитывая, что $u\,\alpha\,wx^n\,\beta'\,v$, мы получаем, что $u\,\alpha\,wx^n\,\beta\,v$, т. е. $(u,v)\in\alpha\beta$. Аналогично проверяется, что если $\ell_i(u)>1$, то $(u,v)\in\beta\alpha$. Поэтому далее можно считать, что $\ell_i(u)=\ell_j(v)=1$. Пусть w_1 и w_2 — слова, существующие в силу леммы 10. Тогда $u\gamma_2w_1\gamma_1w_2\gamma_2v$, $u\,\rho\,w_1$ и $w_2\,\rho\,v$. Из двух последних соотношений вытекает, в частности, что $c(w_1)=c(u)=c(v)=c(w_2)$. Следовательно, $w_1\,\sigma\,w_2$, и потому $w_1\,\alpha\,w_2$. Кроме того, очевидно, что $u\,\beta\,w_1$ и $w_2\,\beta\,v$. Следовательно, $(u,v)\in\beta\alpha\beta$.

Случай 6: $\alpha=\rho$, а $\beta=\gamma\wedge\mu\wedge\sigma$. Ясно, что в этом случае $\alpha\vee\beta\subseteq\mu$, и потому $u\,\mu\,v$. В силу п. в) леммы 6 $\ell(v)\geqslant 2$. Положим $\beta'=\gamma\wedge\sigma$. Ясно, что $(u,v)\in\alpha\vee\beta'$. В силу случая 3 конгруэнции α и β' слабо перестановочны. Следовательно, $(u,v)\in\alpha\beta'\alpha$, т. е. $u\,\alpha\,w_1\,\beta'\,w_2\,\alpha\,v$ для некоторых слов $w_1,w_2\in F$. Поскольку $\alpha=\rho\subseteq\mu$, получаем, что $u\,\mu\,w_1$. С учетом того, что $\ell(u)>1$, из п. в) леммы 6 вытекает, что $\ell(w_1)>1$. Аналогично проверяется, что $\ell(w_2)>1$. Следовательно, $w_1\,\mu\,w_2$. Но тогда $u\,\alpha\,w_1\,\beta\,w_2\,\alpha\,v$, т. е. $(u,v)\in\alpha\beta\alpha$. Далее, $(u,v)\in\beta'\alpha\beta'$, т. е. $u\,\beta'\,w_1'\,\alpha\,w_2'\,\beta'\,v$ для некоторых слов $w_1',w_2'\in F$.

Пусть, как и ранее, $x \in c(u)$. Тогда $u\,\beta'\,w_1'x^n\,\alpha\,w_2'x^n\,\beta'\,v$, $u\,\mu\,w_1'x^n$ и $w_2'x^n\,\mu\,v$, откуда $u\,\beta\,w_1'x^n\,\alpha\,w_2'x^n\,\beta\,v$, т. е. $(u,v) \in \beta\alpha\beta$.

Случай 7: $\alpha = \gamma_1 \wedge \mu \wedge \sigma$, а $\beta = \gamma_2 \wedge \mu \wedge \sigma$. Как и в случае 6, $u\,\mu\,v$, и, в силу п. в) леммы 6, $\ell(v) \geqslant 2$. Положим $\alpha' = \gamma_1 \wedge \sigma$ и $\beta' = \gamma_2 \wedge \sigma$. В силу лемм 5 и 9 конгруэнции α' и β' перестановочны, и потому $(u,v) \in \alpha'\beta'$, т. е. $u\,\alpha'\,w\,\beta'\,v$ для некоторого слова $w \in F$. Пусть $x \in c(u)$. Тогда $u\,\alpha'\,wx^n\,\beta'\,v$ и $u\,\mu\,wx^n\,\mu\,v$, откуда $u\,\alpha\,wx^n\,\beta\,v$. Следовательно, $(u,v) \in \alpha\beta$.

Случай 8: $\alpha = \gamma_1 \wedge \mu \wedge \sigma$, а $\beta = \gamma_2 \wedge \rho$. Как и в случаях 6 и 7, $u\,\mu\,v$, и, в силу п. в) леммы 6, $\ell(v) \geqslant 2$. Положим $\alpha' = \gamma_1 \wedge \sigma$. Ясно, что $(u,v) \in \alpha' \vee \beta$. В силу рассмотрений, проведенных при разборе случая 5, конгруэнции α' и β слабо перестановочны. Следовательно, $(u,v) \in \alpha'\beta\alpha'$, т. е. $u\,\alpha'\,w_1\,\beta\,w_2\,\alpha'\,v$ для некоторых слов $w_1, w_2 \in F$. Пусть $x \in c(u)$. Тогда $u\alpha'\,w_1x^n\,\beta\,w_2x^n\,\alpha'\,v$, $u\,\mu\,w_1x^n$ и $w_2x^n\,\mu\,v$, откуда $u\,\alpha\,w_1x^n\,\beta\,w_2x^n\,\alpha\,v$. Таким образом, $(u,v) \in \alpha\beta\alpha$. Далее, $(u,v) \in \beta\alpha'\beta$, т. е. $u\,\beta\,w_1'\,\alpha'\,w_2'\,\beta\,v$ для некоторых слов $w_1', w_2' \in F$. Поскольку $\beta \subseteq \rho \subseteq \mu$, получаем, что $u\,\mu\,w_1'$. С учетом того, что $\ell(u) > 1$, из п. в) леммы 6 вытекает, что $\ell(w_1') > 1$. Аналогично проверяется, что $\ell(w_2') > 1$. Следовательно, $w_1'\,\mu\,w_2'$. Но тогда $u\,\beta\,w_1'\,\alpha\,w_2'\,\beta\,v$, т. е. $(u,v) \in \beta\alpha\beta$.

Случай 9: $\alpha = \gamma_1 \wedge \rho$, а $\beta = \gamma_2 \wedge \rho$. По соображениям симметрии достаточно установить, что $(u,v) \in \beta\alpha\beta$. Ясно, что в данном случае $u\,\rho\,v$. Пусть w_1 и w_2 — слова, существование которых доказано в лемме 10. Тогда $u\,\gamma_2\,w_1\,\gamma_1\,w_2\,\gamma_2\,v$, $u\,\rho\,w_1$ и $w_2\,\rho\,v$. Из двух последних соотношений вытекает, что $w_1\,\rho\,u\,\rho\,v\,\rho\,w_2$, т. е. $w_1\,\rho\,w_2$. Следовательно, $u\,\beta\,w_1\,\alpha\,w_2\,\beta\,v$, т. е. $(u,v) \in \beta\alpha\beta$.

Теорема 1 доказана. □

Вторым из основных результатов работы является

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп индекса $\leqslant 2$. Следующие условия эквивалентны:*

а) *$\mathcal{V}$ наследственно почти слабо fi-перестановочно;*

б) *$\mathcal{V}$ наследственно почти fi-перестановочно;*

в) *$\mathcal{V}$ либо является вполне регулярным многообразием, либо содержится в одном из многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$.*

Доказательство. Импликация в) $\longrightarrow$ б) вытекает из лемм 8 и 9, а импликация б) $\longrightarrow$ а) не нуждается в доказательстве. Остается доказать импликацию а) $\longrightarrow$ в). Для этого нам понадобится следующее утверждение, усиливающее лемму 2.3 работы [18].

Лемма 11. *Если $\mathcal{V}$ — наследственно почти слабо fi-перестановочное многообразие полугрупп, то либо $\mathcal{V}$ вполне регулярно, либо $\mathcal{V}$ не содержит нетривиальных вполне простых подмногообразий.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — наследственно почти слабо fi-перестановочное многообразие полугрупп, не являющееся вполне регулярным многообразием. Последнее означает, что $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{ZM}$. Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное вполне простое подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$. Тогда $\mathcal{X} \vee \mathcal{ZM} \subseteq \mathcal{V}$, и потому многообразие $\mathcal{X} \vee \mathcal{ZM}$ почти слабо fi-перестановочно. Кроме того, ясно, что $\mathcal{X} \vee \mathcal{ZM} \nsupseteq \mathcal{SL}$. В силу леммы 1 многообразие $\mathcal{X} \vee \mathcal{ZM}$ слабо fi-перестановочно. Из леммы 2 вытекает теперь, что $\mathcal{X} \vee \mathcal{ZM}$ — нильмногообразие. Следовательно, многообразие $\mathcal{X}$ тривиально. □

Пусть теперь $\mathcal{V}$ — наследственно почти слабо fi-перестановочное многообразие полугрупп. В силу леммы 3 решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна, и потому $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий (i), (ii) и (ii′) леммы 4. Из доказательства леммы 2.5 работы [18] вытекает, что всякое многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом, не являющееся вполне регулярным многообразием и не содержащее нетривиальных вполне простых подмногообразий, содержится в $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$. Учитывая этот факт и лемму 11, получаем, что если выполнено условие (i) леммы 4, то либо $\mathcal{V}$ вполне регулярно, либо $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM} \subseteq \mathcal{P}$. По соображениям симметрии осталось рассмотреть случай, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию (ii) леммы 4, т. е. $\mathcal{V} = \mathcal{D} \vee \mathcal{E}$, где $\mathcal{D}$ — одно из многообразий $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, а $\mathcal{E}$ — вполне регулярное многообразие. В силу леммы 11 можно считать, что $\mathcal{V}$ не содержит нетривиальных вполне простых подмногообразий. Следовательно, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{SL}$. По той же причине $\mathcal{RZ} \nsubseteq \mathcal{V}$. Поскольку $\mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{Q}$, получаем, что $\mathcal{D} \neq \mathcal{Q}$, и потому $\mathcal{D} = \mathcal{P}$. Учитывая еще, что $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{SL} \subseteq \mathcal{P} = \mathcal{D}$, имеем $\mathcal{V} = \mathcal{D} \vee \mathcal{E} = \mathcal{D} = \mathcal{P}$.

Теорема 2 доказана. □

Список литературы

[1] Б. М. Верников. *Многообразия полугрупп с мультипликативными ограничениями на вполне инвариантные конгруэнции их свободных объектов* // Докл. РАН. 2002. Т. 384, № 4. С. 446–448.

[2] М. В. Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* // Изв. вузов. Матем. 1989. № 6. С. 48–58.

[3] М. В. Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий.* II // Изв. вузов. Матем. 1992. № 7. С. 3–8.

[4] М. В. Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий.* III // Изв. вузов. Матем. 1992. № 8. С. 21–29.

[5] М. В. Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 3. С. 409–413.

[6] Э. А. Голубов, М. В. Сапир. *Финитно аппроксимируемые многообразия полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 1982. № 11. С. 21–29.

[7] Г. Гретцер. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

[8] И. И. Мельник. *О многообразиях и решетках многообразий полугрупп* // Исслед. по алгебре. Саратов, 1970. Вып. 2. С. 47–57.

[9] T. E. Hall, P. R. Jones. *On the lattice of varieties of bands of groups* // Pacif. J. Math. 1980. Vol. 91, № 2. P. 327–337.

[10] P. R. Jones. *Congruence semimodular varieties of semigroups* // Lect. Notes Math. 1988. Vol. 1320. P. 162–171.

[11] B. Jónsson. *On the representation of lattices* // Math. Scand. 1953. Vol. 1, № 1. P. 193–206.

[12] P. Lipparini. *n-permutable varieties satisfy non trivial congruence identities* // Algebra Universalis. 1995. Vol. 33, № 2. P. 159–168.

[13] F. J. Pastijn. *Commuting fully invariant congruences on free completely regular semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. Vol. 323, № 1. P. 79–92.

[14] M. Petrich, N. R. Reilly. *The modularity of the lattice of varieties of completely regular semigroups and related representations* // Glasgow Math. J. 1990. Vol. 32, № 2. P. 137–152.

[15] L. Polák. *On varieties of completely regular semigroups.* I // Semigroup Forum. 1985. Vol. 32, № 1. P. 97–123.

[16] E. J. Tully. *The equivalence, for semigroup varieties, of two properties concerning congruence relations* // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 70, № 3. P. 399–400.

[17] B. M. Vernikov. *Completely regular semigroup varieties whose free objects have weakly permutable fully invariant congruences* // Semigroup Forum. 2004. Vol. 68, № 1. P. 154–158.

[18] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Permutability of fully invariant congruences on relatively free semigroups* // Acta Sci. Math. (Szeged). 1997. Vol. 63, № 3–4. P. 437–461.

[19] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Commuting fully invariant congruences on free semigroups* // Contrib. General Algebra. 2000. Vol. 12. P. 391–417.

[20] M. V. Volkov, T. A. Ershova. *The lattice of varieties of semigroups with completely regular square* // Monash Conf. on Semigroup Theory in honour of G. B. Preston. Singapore: World Scientific, 1991. P. 306–322.

620083 г. Екатеринбург,
пр. Ленина, 51
Уральский госуниверситет,
математико-механический факультет
e-mail: Boris.Vernikov@usu.ru