

**МНОГООБРАЗИЯ ПОЛУГРУПП,
НА СВОБОДНЫХ ОБЪЕКТАХ КОТОРЫХ
ПОЧТИ ВСЕ ВПОЛНЕ ИНВАРИАНТНЫЕ
КОНГРУЭНЦИИ 1.5-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫ***

Одним из наиболее важных и активно изучаемых классов многообразий универсальных алгебр является класс *конгруэнц-перестановочных* многообразий, т. е. многообразий, на всех алгебрах которых любые две конгруэнции α и β *перестановочны* (удовлетворяют равенству $\alpha\beta = \beta\alpha$). Важность этого класса в немалой степени определяется тем, что он включает в себя все многообразия групп и колец. Но применительно к многообразиям еще одного классического типа алгебр – полугрупп – понятие конгруэнц-перестановочности оказывается слишком жестким и не представляющим существенного интереса. Говоря это, мы имеем в виду следующий факт, впервые доказанный еще в начале 60-х годов в [1] и впоследствии неоднократно передоказывавшийся и усиливавшийся (см., в частности, [2, 3]): многообразие полугрупп конгруэнц-перестановочно тогда и только тогда, когда оно является многообразием периодических групп.

Однако условие конгруэнц-перестановочности можно естественным образом ослабить, потребовав, чтобы перестановочными были не все конгруэнции на всех полугруппах из многообразия, а только все вполне инвариантные конгруэнции на всех полугруппах, свободных в данном многообразии. Это ослабленное условие выполнено уже в широких и важных классах многообразий полугрупп. В частности, в работах [4] и [5] независимо было доказано, что этим свойством обладает всякое *вполне простое* многообразие, т. е. многообразие, состоящее из вполне простых полугрупп. В этих же двух работах (а также в ряде более ранних работ разных авторов) в связи с изучением тождеств в решетках многообразий полугрупп была выявлена важная роль многообразий полугрупп, на свободных объектах которых перестановочны не все вполне инвариантные конгруэнции, а только те из них, которые содержатся в наименьшей полурешеточной конгруэнции (т. е. наименьшей конгруэнции, фактор по которой – полурешетка). Последним свойством, как показано в [4]

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00540), межвузовской научной программы «Университеты России» (проект № 04.01.437) и президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-2227.2003.1).

и [5], обладает уже всякое *вполне регулярное* многообразие, т. е. многообразие, состоящее из *вполне регулярных* полугрупп (объединений групп).

Для краткости назовем многообразия полугрупп, на всех свободных объектах которых любые две вполне инвариантные конгруэнции [содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции] перестановочны, [*почти*] *fi-перестановочными*. Условие почти *fi-перестановочности*, вообще говоря, не наследуется подмногообразиями (см. [6], пример 2.10) – в отличие от условия *fi-перестановочности*, наследственность которого вытекает из некоторых простых и весьма общих соображений (см. [6], лемма 1.1). Многообразие, все подмногообразия которых почти *fi-перестановочны*, будем называть *наследственно почти fi-перестановочными*. Отметим, что свободные объекты подмногообразий многообразия \mathcal{V} – это в точности относительно свободные полугруппы, принадлежащие \mathcal{V} . Поэтому наследственная почти *fi-перестановочность* многообразия \mathcal{V} эквивалентна тому, что на всех относительно свободных полугруппах из \mathcal{V} (а не только на \mathcal{V} -свободных полугруппах) любые две вполне инвариантные конгруэнции, содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции, перестановочны.

Полное описание *fi-перестановочных* и наследственно почти *fi-перестановочных* многообразий полугрупп получено в [6], а полное описание почти *fi-перестановочных* многообразий полугрупп – в [7]. При этом в двух указанных работах было установлено, что в некоторых весьма обширных частных случаях из [*почти*] *fi-перестановочности* многообразия \mathcal{V} вытекает, что вполне инвариантные конгруэнции α и β на \mathcal{V} -свободных полугруппах [содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции] удовлетворяют следующему условию, существенно более сильному, чем перестановочность:

$$\alpha \vee \beta = \alpha \cup \beta \quad (1)$$

(здесь и далее через \vee обозначается объединение в решетке конгруэнций, а через \cup – теоретико-множественное объединение; первым из этих символов ниже будет обозначаться также объединение в решетках многообразий).

Положим $\alpha \circ_n \beta = \alpha\beta\alpha \cdots$, где число сомножителей в правой части равенства равно n . Напомним, что конгруэнции α и β называются *n-перестановочными*, если $\alpha \circ_n \beta = \beta \circ_n \alpha$. Ясно, что перестановочность конгруэнций – это в точности их 2-перестановочность. Общеизвестно, что

$$\alpha \vee \beta = \alpha \cup \beta \cup \alpha\beta \cup \beta\alpha \cup \cdots \cup \alpha \circ_n \beta \cup \beta \circ_n \alpha \cup \cdots \quad (2)$$

Очевидно, что из перестановочности конгруэнций α и β вытекает, что $\alpha \vee \beta = \alpha\beta$. Ясно, что условие (1) сильнее, чем 2-перестановочность, и слабее, чем 1-перестановочность. Более того, равенство (2) показывает, что (1) – это,

вероятно, единственное естественное ограничение на конгруэнции, расположенное «посередине» между 1-перестановочностью и 2-перестановочностью. Поэтому мы будем называть конгруэнции α и β со свойством (1) *1.5-перестановочными*.

Многообразия полугрупп, на всех свободных объектах которых любые две вполне инвариантные конгруэнции [содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции] 1.5-перестановочны, назовем [*почти*] *fi-1.5-перестановочными*. Многообразия, все подмногообразия которых почти *fi-1.5-перестановочны*, будем называть *наследственно почти fi-1.5-перестановочными*. Описание *fi-1.5-перестановочных* многообразий полугрупп получено в работе [8]. В данной работе описаны почти *fi-1.5-перестановочные* и наследственно почти *fi-1.5-перестановочные* многообразия полугрупп.

Приведем некоторые определения и обозначения, необходимые для формулировки основных результатов работы. Напомним, что многообразие полугрупп называется *цепным*, если решетка его подмногообразий является цепью. Отметим, что всякое цепное многообразие групп является периодическим и потому может рассматриваться как многообразие полугрупп. Через $L(\mathcal{V})$ обозначается решетка подмногообразий многообразия \mathcal{V} , а через $\text{var } \Sigma$ – многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ . Введем обозначения для ряда конкретных многообразий полугрупп:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \text{var } \{x = y\}; \quad \mathcal{A}_p = \text{var } \{x^p y = y, xy = yx\}, \text{ где } p \text{ – простое число}; \\ \mathcal{S}\mathcal{L} &= \text{var } \{x^2 = x, xy = yx\}; \quad \mathcal{C} = \text{var } \{x^2 = x^3, xy = yx\}; \\ \mathcal{L}\mathcal{Z} &= \text{var } \{xy = x\}; \quad \mathcal{R}\mathcal{Z} = \text{var } \{xy = y\}; \quad \mathcal{Z}\mathcal{M} = \text{var } \{xy = 0\}; \\ \mathcal{L}\mathcal{R}\mathcal{B} &= \text{var } \{x^2 = x, xyx = xy\}; \quad \mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{B} = \text{var } \{x^2 = x, xyx = yx\}; \\ \mathcal{L}\mathcal{Z}\mathcal{M} &= \text{var } \{xyz = xy\}; \quad \mathcal{R}\mathcal{Z}\mathcal{M} = \text{var } \{xyz = yz\}; \\ \mathcal{P} &= \text{var } \{xy = x^2y, x^2y^2 = y^2x^2\}; \quad \overleftarrow{\mathcal{P}} = \text{var } \{xy = xy^2, x^2y^2 = y^2x^2\}. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем без специальных оговорок использовать тот общеизвестный факт, что многообразия $\mathcal{A}_p, \mathcal{L}\mathcal{Z}, \mathcal{R}\mathcal{Z}, \mathcal{S}\mathcal{L}, \mathcal{Z}\mathcal{M}$ и только они являются атомами решетки всех многообразий полугрупп (см., например, [9]).

Основными результатами работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Многообразие полугрупп \mathcal{V} почти fi-1.5-перестановочно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- 1) $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$, где \mathcal{G} – цепное многообразие групп, а \mathcal{F} – одно из многообразий $\mathcal{S}\mathcal{L}$ и \mathcal{T} ;
- 2) \mathcal{V} совпадает с одним из многообразий $\mathcal{L}\mathcal{Z}$ и $\mathcal{R}\mathcal{Z}$;

- 3) \mathcal{V} содержит \mathcal{SL} и содержится в одном из многообразий $\mathcal{LRB} \vee \mathcal{ZM}$, $\mathcal{RRB} \vee \mathcal{ZM}$, $\mathcal{LZM} \vee \mathcal{SL}$ и $\mathcal{RZM} \vee \mathcal{SL}$;
- 4) \mathcal{V} совпадает с одним из многообразий \mathcal{P} и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$;
- 5) \mathcal{V} удовлетворяет одной из следующих систем тождеств:

$$xyz = 0; \quad (3)$$

$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}, x^2 = 0, \text{ где } \pi \in \{(12), (23), (123)\}; \quad (4)$$

$$xyz = zyx, x^2 = 0, xyx = 0; \quad (5)$$

$$xyz = zyx, x^2 = 0, xyzt = 0; \quad (6)$$

- 6) $\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{M}$, где \mathcal{M} удовлетворяет одной из следующих систем тождеств:

$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}, x^2y = 0, \text{ где } \pi \in \{(12), (13), (23)\};$$

$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}, xy^2 = 0, \text{ где } \pi \in \{(12), (23)\};$$

$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}, x^2y = xy^2, x^2yz = 0, \text{ где } \pi \in \{(12), (23)\};$$

$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}, x^2y = yx^2, x^3y = 0, \text{ где } \pi \in \{(12), (23)\};$$

$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}, x^2y = yx^2, x^2y^2 = 0, \text{ где } \pi \in \{(12), (23)\};$$

$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}, x^2y = yx^2, x^3y = x^2y^2, x^2y^2z = 0, \text{ где } \pi \in \{(12), (23)\};$$

$$xyz = zyx, xyx = 0;$$

$$xyz = zyx, x^2y = yxy, x^2yz = 0;$$

$$xyz = zyx, x^2y = xyx, x^3y = 0;$$

$$xyz = zyx, x^2y = xyx, x^2y^2 = 0;$$

$$xyz = zyx, x^2y = xyx, x^3y = x^2y^2, x^2y^2z = 0;$$

$$xyz = yzx, x^3y = 0;$$

$$xyz = yzx, x^2y^2 = 0;$$

$$xyz = yzx, x^3y = x^2y^2, x^2y^2z = 0;$$

- 7) $\mathcal{V} = \mathcal{C} \vee \mathcal{N}$, где \mathcal{N} удовлетворяет тождествам $x^2y = xyx = yx^2 = 0$ и тождеству вида $x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}$ для некоторой нетривиальной перестановки π .

Теорема 2. Многообразие полугрупп \mathcal{V} наследственно почти fi -1.5-перестановочно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$, где \mathcal{G} – цепное многообразие групп, а \mathcal{F} – одно из многообразий \mathcal{SL} и \mathcal{T} ;

- 2) \mathcal{V} содержится в одном из многообразий \mathcal{LRB} и \mathcal{RRB} ;
- 3) \mathcal{V} совпадает с одним из многообразий \mathcal{P} и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$;
- 4) $\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{M}$, где \mathcal{F} – одно из многообразий \mathcal{SL} и \mathcal{T} , а \mathcal{M} удовлетворяет одной из систем тождеств (3)–(6);
- 5) $\mathcal{V} = \mathcal{C} \vee \mathcal{N}$, где \mathcal{N} удовлетворяет одной из систем тождеств (4) и (5).

Теоремы 1 и 2 описывают соответствующие классы многообразий полугрупп по модулю цепных многообразий групп (то же самое относится и к описанию fi -1.5-перестановочных многообразий полугрупп, полученному в [8]). В этой связи отметим, что описание локально конечных цепных многообразий групп непосредственно вытекает из результатов работы В. А. Артамонова [10]. В то же время задача описания произвольных цепных многообразий групп является, по-видимому, чрезвычайно сложной, так как из результатов С. В. Иванова [11] вытекает, что для всякого простого $p > 10^{216}$ существует континуум не локально конечных многообразий групп экспоненты p , решетка подмногообразий которых есть 3-элементная цепь.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть \mathcal{V} – почти fi -1.5-перестановочное многообразие полугрупп. Ясно, что \mathcal{V} почти fi -перестановочно. В работе [7] показано, что всякое почти fi -перестановочное многообразие либо вполне регулярно, либо содержит \mathcal{SL} и удовлетворяет тождеству

$$xy = (xy)^2, \quad (7)$$

либо удовлетворяет одному из условий 4–7 теоремы 1. Дальнейшие рассмотрения распадаются на два случая.

Случай 1: \mathcal{V} вполне регулярно. Предположим сначала, что $\mathcal{V} \not\supseteq \mathcal{SL}$. Тогда наименьшая полурешеточная конгруэнция на всякой полугруппе из \mathcal{V} совпадает с универсальным отношением. Следовательно, \mathcal{V} fi -1.5-перестановочно. В работе [8] доказано, что всякое fi -1.5-перестановочное вполне регулярное многообразие полугрупп, не содержащее \mathcal{SL} , либо является цепным многообразием групп, либо совпадает с одним из многообразий \mathcal{LZ} и \mathcal{RZ} . Следовательно, в рассматриваемом случае \mathcal{V} удовлетворяет одному из условий 1 или 2 теоремы 1. Поэтому далее можно считать, что $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$.

Обозначим через F абсолютно свободную полугруппу счетного ранга. Нам понадобится следующая лемма, легко проверяемая непосредственно.

Лемма 1. Пусть \mathcal{V} – многообразие полугрупп такое, что $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$, а ν и σ – вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F , отвечающие многообразиям \mathcal{V} и \mathcal{SL} соответственно. Многообразие \mathcal{V} почти fi -1.5-перестановочно тогда и только тогда, когда любые две вполне инвариантные конгруэнции на F , содержащиеся ν и содержащиеся в σ , 1.5-перестановочны.

Дальнейшие рассуждения удобно разбить на два подслучая.

Подслучай 1.1: \mathcal{V} – многообразие связок. Нам понадобится следующая

Лемма 2. *Если \mathcal{V} – почти fi -1.5-перестановочное многообразие полугрупп и $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$, то либо \mathcal{LZ} , либо \mathcal{RZ} не содержится в \mathcal{V} .*

Доказательство. Пусть, напротив, $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{V}$. Обозначим через λ и ρ вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F , отвечающие многообразиям $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$ и $\mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL}$ соответственно. Тогда $(xyz, zxy) \in \lambda\rho$, так как $xyz \lambda xzy \rho zxy$, но $(xyz, zxy) \notin \lambda \cup \rho$, поскольку ни одно из многообразий $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$ и $\mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL}$ не удовлетворяет тождеству $xyz = zxy$. Таким образом, конгруэнции λ и ρ не являются 1.5-перестановочными. В силу леммы 1 это противоречит тому, что многообразие \mathcal{V} почти fi -1.5-перестановочно. Лемма доказана.

Итак, \mathcal{V} – многообразие связок, не содержащее по крайней мере одного из многообразий \mathcal{LZ} и \mathcal{RZ} . Это означает, что \mathcal{V} содержится в одном из многообразий \mathcal{LRB} и \mathcal{RRB} (см., например, [9]). Поскольку, кроме того, $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$, мы получаем, что выполнено условие 3 теоремы 1.

Подслучай 1.2: \mathcal{V} не является многообразием связок. Поскольку \mathcal{V} вполне регулярно и не является многообразием связок, $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{A}_p$ для некоторого простого p . Покажем, что \mathcal{V} не содержит ни одного из многообразий \mathcal{LZ} и \mathcal{RZ} . По соображениям симметрии достаточно убедиться в том, что $\mathcal{V} \not\supseteq \mathcal{LZ}$. Предположим противное. Обозначим через α и λ вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F , отвечающие многообразиям $\mathcal{A}_p \vee \mathcal{SL}$ и $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$ соответственно. Тогда $(x^{p+1}y, y^2x) \in \alpha\lambda$, так как $x^{p+1}y \alpha yx \lambda y^2x$, но $(x^{p+1}y, y^2x) \notin \alpha \cup \lambda$, поскольку ни одно из многообразий $\mathcal{A}_p \vee \mathcal{SL}$ и $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$ не удовлетворяет тождеству $x^{p+1}y = y^2x$. Таким образом, конгруэнции α и λ не являются 1.5-перестановочными. В силу леммы 1 это противоречит тому, что многообразие \mathcal{V} почти fi -1.5-перестановочно.

Итак, \mathcal{V} – вполне регулярное многообразие, не содержащее многообразий \mathcal{LZ} и \mathcal{RZ} . Как хорошо известно, это означает, что $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$, где \mathcal{G} – некоторое многообразие периодических групп, а \mathcal{F} – одно из многообразий \mathcal{SL} и \mathcal{T} (см., например, [12, 13]). Осталось проверить, что \mathcal{G} – цепное многообразие (так как в этом случае \mathcal{V} удовлетворяет условию 1 доказываемой теоремы).

Нам понадобится следующий хорошо известный факт (легко вытекающий, например, из результатов работы [14]).

Лемма 3. *Если \mathcal{K} – многообразие полугрупп и $\mathcal{K} \not\supseteq \mathcal{SL}$, то $L(\mathcal{K} \vee \mathcal{SL}) \cong \cong L(\mathcal{K}) \times L(\mathcal{SL})$.*

Предположим, что \mathcal{G} содержит многообразия \mathcal{X} и \mathcal{Y} , несравнимые в решетке $L(\mathcal{G})$. Обозначим через χ и η вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F , отвечающие многообразиям $\mathcal{X} \vee \mathcal{SL}$ и $\mathcal{Y} \vee \mathcal{SL}$ соответственно. Из леммы 3 вытекает, что эти многообразия несравнимы в решетке $L(\mathcal{V})$. Учитывая этот факт и повторяя дословно доказательство леммы 3 работы [8], можно убедиться в том, что конгруэнции χ и η не являются 1.5-перестановочными. Но это противоречит лемме 1.

Случай 2: \mathcal{V} содержит \mathcal{SL} и удовлетворяет тождеству (7). Проверим, что в этом случае \mathcal{V} удовлетворяет условию 3 доказываемой теоремы. Выполнение в \mathcal{V} тождества (7) означает, что квадрат всякой полугруппы из \mathcal{V} является связкой. В силу леммы 2 \mathcal{V} не может содержать одновременно многообразий \mathcal{LZ} и \mathcal{RZ} . Это означает, что всякая связка из \mathcal{V} , а значит и квадрат всякой полугруппы из \mathcal{V} , содержится в одном из многообразий \mathcal{LRB} и \mathcal{RRB} (см., например, [9]). В силу симметрии достаточно предположить, что квадрат всякой полугруппы из \mathcal{V} лежит в \mathcal{LRB} , и доказать, что в этом случае \mathcal{V} содержится в одном из многообразий $\mathcal{LRB} \vee \mathcal{ZM}$ и $\mathcal{LZM} \vee \mathcal{SL}$. Обозначим многообразие всех полугрупп, квадрат которых принадлежит \mathcal{LRB} , через \mathcal{SLRB} . Из результатов работы [15] легко извлекается, что диаграмма решетки $L(\mathcal{SLRB})$ имеет следующий вид:

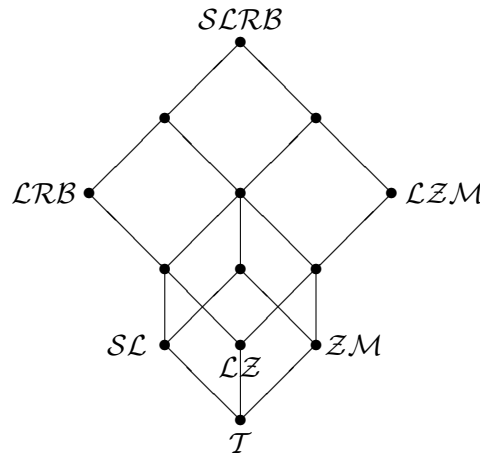


Рис. 1. Решетка $L(\mathcal{SLRB})$

Из рис. 1 видно, что для наших целей достаточно доказать, что \mathcal{V} не может содержать одновременно многообразий \mathcal{LRB} и \mathcal{LZM} . Предположим противное. Обозначим через λ и ζ вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F , отвечающие многообразиям \mathcal{LRB} и $\mathcal{LZM} \vee \mathcal{SL}$ соответственно.

В силу леммы 1 конгруэнции λ и ζ 1.5-перестановочны. Из рис. 1 видно, что $\mathcal{LRB} \wedge (\mathcal{LZM} \vee \mathcal{SL}) = \mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$. Поскольку в $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$ выполнено тождество $xuz = xzu$, мы получаем, что $(xuz, xzu) \in \lambda \vee \zeta = \lambda \cup \zeta$. Но это неверно, поскольку ни в одном из многообразий \mathcal{LRB} и $\mathcal{LZM} \vee \mathcal{SL}$ тождество $xuz = xzu$ не выполнено. Полученное противоречие завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Здесь и при доказательстве достаточности в теореме 2 нам понадобится следующая

Лемма 4. Пусть \mathcal{V} – многообразие полугрупп такое, что выполнено одно из следующих условий:

- а) \mathcal{V} – цепное многообразие;
- б) $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$, интервал $[\mathcal{SL}, \mathcal{V}]$ решетки $L(\mathcal{V})$ является цепью и всякое подмногообразие многообразия \mathcal{V} , не содержащее \mathcal{SL} , является цепным.

Тогда \mathcal{V} наследственно почти fi -1.5-перестановочно.

Доказательство. Пусть S – полугруппа, свободная в некотором подмногообразии многообразия \mathcal{V} . Из условия вытекает, что вполне инвариантные конгруэнции на S , содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции, образуют цепь по включению и потому 1.5-перестановочны. Лемма доказана.

Следующее утверждение влечет требуемый нам факт в случае, когда \mathcal{V} удовлетворяет условию 1 теоремы 1.

Следствие 1. Если $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$, где \mathcal{G} – цепное многообразие групп, а \mathcal{F} – одно из многообразий \mathcal{SL} и \mathcal{T} , то \mathcal{V} наследственно почти fi -1.5-перестановочно.

Доказательство. Если по крайней мере одно из многообразий \mathcal{G} и \mathcal{F} тривиально, то \mathcal{V} является цепным многообразием. Если же $\mathcal{G}, \mathcal{F} \neq \mathcal{T}$, то, учитывая лемму 3 и тот факт, что решетка $L(\mathcal{SL})$ является 2-элементной цепью, получаем, что \mathcal{V} удовлетворяет условию «б» леммы 4. В любом случае из этой леммы вытекает, что \mathcal{V} наследственно почти fi -1.5-перестановочно. Следствие доказано.

Поскольку многообразия \mathcal{LZ} и \mathcal{RZ} являются цепными, из леммы 4 непосредственно вытекает, что если \mathcal{V} удовлетворяет условию 2 теоремы 1, то оно почти fi -1.5-перестановочно.

Предположим теперь, что \mathcal{V} удовлетворяет условию 3 теоремы 1. По соображениям симметрии можно считать, что \mathcal{V} содержит \mathcal{SL} и содержится

в одном из многообразий $\mathcal{LRB} \vee \mathcal{ZM}$ и $\mathcal{LZM} \vee \mathcal{SL}$. Обозначим через ν и σ вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F , отвечающие многообразиям \mathcal{V} и \mathcal{SL} соответственно. В силу леммы 1 достаточно показать, что любые две вполне инвариантные конгруэнции на F , содержащие ν и содержащиеся в σ , 1.5-перестановочны. Пусть α и β – две такие конгруэнции. Ясно, что можно считать, что α и β несравнимы в решетке вполне инвариантных конгруэнций на F . Рисунок 1 показывает, что достаточно рассмотреть следующие два случая:

а) α отвечает одному из многообразий \mathcal{LRB} и $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$, а β – многообразию $\mathcal{ZM} \vee \mathcal{SL}$;

б) α отвечает многообразию \mathcal{LRB} , а β – многообразию $\mathcal{ZM} \vee \mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$.

Через \equiv будем обозначать отношение равенства на полугруппе F . Для всякого слова $u \in F$ обозначим через $c(u)$ множество всех букв, входящих в запись u , через $\ell(u)$ – длину слова u , а через $h(u)$ – первую букву в записи слова u . Хорошо известно и легко проверяется, что тождество $u = v$ выполнено:

в многообразии \mathcal{SL} тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$;

в многообразии \mathcal{LZ} тогда и только тогда, когда $h(u) \equiv h(v)$;

в многообразии \mathcal{ZM} тогда и только тогда, когда либо u и v – одна и та же буква, либо $\ell(u), \ell(v) \geq 2$.

Пусть $u, v \in F$ и $(u, v) \in \alpha\beta$, т.е. $u \alpha w \beta v$ для некоторого слова $w \in F$. Достаточно убедиться в том, что $(u, v) \in \alpha \cup \beta$. Ясно, что тождество $w = v$ выполнено в многообразии \mathcal{ZM} . Если w и v – одна и та же буква, то $u \alpha v$. Поэтому ниже можно считать, что $\ell(v) \geq 2$. Далее, $u = w = v$ в многообразии \mathcal{SL} и потому $c(u) = c(w) = c(v)$. Если $\ell(u) = 1$, т.е. $u \equiv x$ для некоторой буквы x , то $v \equiv x^k$ для некоторого натурального k . Но тогда $u \alpha v$. Поэтому можно считать, что и $\ell(u) \geq 2$. Если β отвечает многообразию $\mathcal{ZM} \vee \mathcal{SL}$, то $u \beta v$. Поэтому можно считать, что α отвечает многообразию \mathcal{LRB} , а β – многообразию $\mathcal{ZM} \vee \mathcal{LZ} \vee \mathcal{SL}$. В частности, это означает, что $u = w = v$ в многообразии \mathcal{LZ} , и потому $h(u) \equiv h(w) \equiv h(v)$. Мы видим, что $\ell(u), \ell(v) \geq 2$, $h(u) \equiv h(v)$ и $c(u) = c(v)$. Это означает, что $u \beta v$.

Наконец, почти *fi*-1.5-перестановочность многообразий, удовлетворяющих условиям 4–7 теоремы 1, доказана в [7].

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть \mathcal{V} – наследственно почти *fi*-1.5-перестановочное многообразие полугрупп. Ясно, что \mathcal{V} наследственно почти *fi*-перестановочно. В силу теоремы 2 работы [6] всякое наследственно почти *fi*-перестановочное многообразие либо вполне регулярно, либо удовлетворяет одному из условий 3–5 теоремы 2. Поэтому далее можно считать, что \mathcal{V} вполне регулярно. Ясно, что \mathcal{V} почти *fi*-1.5-перестановочно и потому удовлетворяет одному из условий 1–7 теоремы 1. Условие 1

этой теоремы совпадает с условием 1 теоремы 2. Если выполнено условие 2 теоремы 1, то очевидно, что \mathcal{V} удовлетворяет и условию 2 теоремы 2. Если \mathcal{V} удовлетворяет условию 3 теоремы 1, то, будучи вполне регулярным, оно содержится в одном из многообразий \mathcal{LRB} и \mathcal{RRB} (см. рис. 1) и потому вновь удовлетворяет условию 2 теоремы 2. Случай, когда \mathcal{V} удовлетворяет одному из условий 4 или 7 теоремы 1, невозможен, так как многообразия \mathcal{P} , $\overline{\mathcal{P}}$ и \mathcal{C} не являются вполне регулярными. Если \mathcal{V} удовлетворяет условию 5 теоремы 1, то оно является нильмногообразием. Поскольку, кроме того, \mathcal{V} вполне регулярно, мы получаем, что $\mathcal{V} = \mathcal{T}$ и выполнено, например, условие 2 теоремы 2. Наконец, если \mathcal{V} удовлетворяет условию 6 теоремы 1, то оно является объединением многообразия \mathcal{SL} и некоторого нильмногообразия \mathcal{M} . Поскольку \mathcal{V} вполне регулярно, это означает, что $\mathcal{M} = \mathcal{T}$ и $\mathcal{V} = \mathcal{SL}$. Таким образом, вновь выполнено условие 2 теоремы 2. Необходимость доказана.

Достаточность. Если \mathcal{V} удовлетворяет условию 1 теоремы 2, то достаточно сослаться на следствие 1. Если выполнено условие 2 доказываемой теоремы, то, как видно из рис. 1, \mathcal{V} удовлетворяет условию «б» леммы 4 и потому наследственно почти fi -1.5-перестановочно. Если же выполнено одно из условий 3–5 теоремы 2, то наследственная почти fi -1.5-перестановочность многообразия \mathcal{V} доказана в [6]. (Отметим, что для условия 3 ссылку на [6] можно заменить ссылкой на лемму 4, поскольку, как легко понять, многообразия \mathcal{P} и $\overline{\mathcal{P}}$ удовлетворяют условию «б» этой леммы.)

Теорема 2 доказана.

Из доказательства необходимости в теореме 2 видно, что если вполне регулярное многообразие полугрупп почти fi -1.5-перестановочно, то оно удовлетворяет одному из условий 1 и 2 теоремы 2. Поэтому справедливо

Следствие 2. *Вполне регулярное многообразие полугрупп почти fi -1.5-перестановочно тогда и только тогда, когда оно наследственно почти fi -1.5-перестановочно.*

Если \mathcal{X} и \mathcal{Y} – два многообразия полугрупп такие, что $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, то, как обычно, будем обозначать через $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ интервал решетки всех многообразий полугрупп с наименьшим элементом \mathcal{X} и наибольшим элементом \mathcal{Y} . Положим $\mathcal{SB} = \text{var} \{xy = (xy)^2\}$. Первое из следующих двух утверждений вытекает из теоремы 1 данной работы и основного результата работы [7], а второе – из теоремы 2 данной работы и теоремы 2 работы [6].

Следствие 3. *Многообразие полугрупп, не являющееся вполне регулярным и не принадлежащее интервалу $[\mathcal{SL}, \mathcal{SB}]$, почти fi -перестановочно тогда и только тогда, когда оно почти fi -1.5-перестановочно.*

Следствие 4. *Многообразия полугрупп, не являющиеся вполне регулярным, наследственно почти fi -перестановочно тогда и только тогда, когда оно наследственно почти fi -1.5-перестановочно.*

Отметим, что в действительности следствия 3 и 4 вытекают из доказательств основного результата работы [7] и теоремы 2 работы [6] соответственно, но в явном виде они в этих работах не отмечались.

В работе [8] показано, в частности, что вполне регулярное многообразие полугрупп fi -1.5-перестановочно тогда и только тогда, когда оно является цепным многообразием. Теорема 1 показывает, что для почти fi -1.5-перестановочных многообразий это неверно. Но некоторый ослабленный вариант этого утверждения имеет место. Чтобы сформулировать его, напомним одно определение. Говорят, что решетка имеет d -ширину n , если она содержит n попарно несравнимых элементов, причем n – наибольшее число с таким свойством. Ясно, что цепные многообразия – это в точности многообразия, решетка подмногообразий которых имеет d -ширину 1.

Следствие 5. *Если \mathcal{V} – вполне регулярное почти fi -1.5-перестановочное многообразие полугрупп, то решетка $L(\mathcal{V})$ имеет d -ширину ≤ 2 .*

Доказательство. Из доказательства необходимости в теореме 2 видно, что \mathcal{V} либо совпадает с многообразием вида $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}$, где \mathcal{G} – цепное многообразие групп, а \mathcal{F} – одно из многообразий \mathcal{SL} и \mathcal{T} , либо содержится в одном из многообразий \mathcal{LRB} и \mathcal{RRB} . В первом случае остается сослаться на лемму 3, а во втором – на рис. 1 и тот факт, что решетки $L(\mathcal{LRB})$ и $L(\mathcal{RRB})$ изоморфны. Следствие доказано.

Напомним, что многообразие полугрупп называется *многообразием индекса n* , если все его нильполугруппы нильпотентны степени $\leq n$, причем n – наименьшее число с таким свойством. Очевидно, что вполне регулярные многообразия – это в точности многообразия индекса 1. Отметим, что для многообразий индекса 2 аналоги следствий 2 и 5 места не имеют. В самом деле, легко понять, что многообразии $\mathcal{LRB} \vee \mathcal{ZM}$ имеет индекс 2. В то же время оно почти fi -1.5-перестановочно (в силу теоремы 1), но не является наследственно почти fi -1.5-перестановочным (в силу теоремы 2), а решетка его подмногообразий имеет d -ширину 3 (см. рис. 1).

Литература

1. TULLY E. J. The equivalence, for semigroup varieties, of two properties concerning congruence relations // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 70, № 3. P. 399–400.

2. JONES P. R. Congruence semimodular varieties of semigroups // Lect. Notes Math. 1988. Vol. 1320. P. 162–171.
3. LIPPARINI P. n -permutable varieties satisfy non trivial congruence identities // Algebra Universalis. 1995. Vol. 33, № 2. P. 159–168.
4. PASTIJN F. J. Commuting fully invariant congruences on free completely regular semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. Vol. 323, № 1. P. 79–92.
5. PETRICH M., REILLY N. R. The modularity of the lattice of varieties of completely regular semigroups and related representations // Glasgow Math. J. 1990. Vol. 32, № 2. P. 137–152.
6. VERNIKOV B. M., VOLKOV M. V. Permutability of fully invariant congruences on relatively free semigroups // Acta Sci. Math. (Szeged). 1997. Vol. 63, № 3–4. P. 437–461.
7. VERNIKOV B. M., VOLKOV M. V. Commuting fully invariant congruences on free semigroups // Contrib. General Algebra. 2000. Vol. 12. P. 391–417.
8. VERNIKOV B. M. Semigroup varieties with 1.5-permutable fully invariant congruences on their free objects // Acta Appl. Math. 2005. Vol. 85, № 1–3. P. 313–318.
9. EVANS T. The lattice of semigroup varieties // Semigroup Forum. 1971. Vol. 2, № 1. P. 1–43.
10. АРТАМОНОВ В. А. Цепные многообразия групп // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1978. Вып. 3. С. 3–8.
11. ИВАНОВ С. В. О нескольких вопросах теории многообразий групп // Международный конф. по алгебре, посвящен. памяти А. И. Мальцева: Тез. докл. по теории групп. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1989. С. 49.
12. HALL T. E., JONES P. R. On the lattice of varieties of bands of groups // Pacif. J. Math. 1980. Vol. 91, № 2. P. 327–337.
13. POLÁK L. On varieties of completely regular semigroups. I // Semigroup Forum. 1985. Vol. 32, № 1. P. 97–123.
14. МЕЛЬНИК И. И. О многообразиях и решетках многообразий полугрупп // Исследования по алгебре. Саратов: Саратов. гос. ун-т, 1970. Вып. 2. С. 47–57.
15. GERHARD J. A. Semigroups with an idempotent power. II. The lattice of equational subclasses of $[(xy)^2 = xy]$ // Semigroup Forum. 1977. Vol. 14, № 4. P. 375–388.

Статья поступила 02.10.2003 г.