

Вопросы ко 2-му экзамену по курсу «Алгебра и геометрия»

1. Определитель полураспавшейся матрицы. Определитель произведения матриц.
2. Характеристический многочлен матрицы. Теорема Гамильтона-Кэли.
3. Обратная матрица: определение, критерий обратимости, формула для вычисления, свойства, применение к решению систем линейных уравнений и матричных уравнений, нахождение с помощью элементарных преобразований.
4. Ранг матрицы по строкам, по столбцам и по минорам. Теорема о ранге матрицы.
5. Ранг произведения матриц. Теорема Кронекера-Капелли.
6. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Векторная запись общего решения произвольной системы линейных уравнений.
7. Линейный оператор. Теорема существования и единственности линейного оператора. Матрица линейного оператора в базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат вектора и матрицы оператора при замене базиса.
8. Образ и ядро линейного оператора. Теорема о размерности образа и ядра. Алгоритмы нахождения базисов образа и ядра.
9. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Теоремы о собственных векторах, относящихся к одному и тому же собственному значению и к разным собственным значениям. Собственные значения и корни характеристического уравнения оператора. Линейные операторы, приводимые к диагональному виду.
10. Нильпотентные операторы. Основная теорема о нильпотентных операторах.
11. Цепочки ядер и образов степеней линейного оператора. Разложение Фитинга.
12. Корневые подпространства. Теорема о корневом разложении. Теорема о приведении матрицы оператора к жордановой нормальной форме.
13. Скалярное произведение в векторном пространстве. Ослабленный закон сокращения в пространствах со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами. Неравенство Минковского. Расстояние между векторами.
14. Матрица Грама и ее простейшие применения (вычисление скалярного произведения, критерий линейной независимости системы векторов).
15. Ортогональность. Линейная независимость ортогонального набора ненулевых векторов. Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
16. Дополнение ортогональной системы ненулевых векторов до ортогонального базиса. Ортогональное дополнение к подпространству и его свойства. Ортогональное разложение векторного пространства.
17. Псевдорешения несовместной системы линейных уравнений (определение и способ нахождения).
18. Оператор, сопряженный к данному. Теорема о существовании, единственности и линейности сопряженного оператора. Свойства сопряженного оператора. Матрица сопряженного оператора.
19. Самосопряженный оператор. Эрмитовость матрицы самосопряженного оператора. Свойства корней характеристического уравнения и собственных векторов самосопряженного оператора.
20. Свойства корневых подпространств относительно самосопряженного оператора. Основная теорема о самосопряженном операторе.
21. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа, приведение к главным осям).
22. Закон инерции квадратичных форм.
23. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий положительной определенности формы в терминах ее канонического вида. Критерий Сильвестра.
24. Эллипс: определение, фокусы, эксцентриситет, директрисы, расположение на плоскости, фокальное, директориальное и оптическое свойства.

25. Гипербола: определение, асимптоты, фокусы, эксцентриситет, директрисы, расположение на плоскости, фокальное, директориальное и оптическое свойства. «Школьное» уравнение гиперболы.
26. Парабола: определение, фокус, директриса, расположение на плоскости, теорема о параболе, оптическое свойство параболы. «Школьное» уравнение параболы.
27. Классификация квадрик на плоскости.
28. Классификация квадрик в пространстве.
29. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида.
30. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида.