УДК 512.532.2

Об одном ослабленном варианте конгруэнц-перестановочности для многообразий полугрупп*

Б. М. Верников

Введение

Хорошо известно, что выполнение тождеств в решетках многообразий универсальных алгебр тесно связано с мультипликативными свойствами вполне инвариантных конгруэнций на свободных алгебрах многообразий. (Речь идет о свойствах, выразимых в терминах произведения бинарных отношений.) Пусть α и β — конгруэнции на одной и той же алгебре, а n — натуральное число. Положим $\alpha \circ_n \beta = \alpha\beta\alpha\beta\cdots$, где число сомножителей в правой части равенства равно n. Конгруэнции α и β называются *n-перестановочными*, если $\alpha \circ_n \beta = \beta \circ_n \alpha$. При $n = 2$ получаем обычную перестановочность, 3-перестановочные конгруэнции принято называть *слабо перестановочными*. В силу классических результатов Йонссона (см., например, [4], §IV.4), если многообразие $\mathcal{V}$ [*слабо*] *конгруэнц-перестановочно*, т. е. если на всякой алгебре из $\mathcal{V}$ любые две конгруэнции [слабо] перестановочны, то решетка его подмногообразий $L(\mathcal{V})$ дезаргова [модулярна]. В [7] показано, что *конгруэнц-n-перестановочность* многообразия $\mathcal{V}$, т. е. n-перестановочность любых двух конгруэнций на всякой алгебре из $\mathcal{V}$, влечет наличие нетривиального тождества в решетке $L(\mathcal{V})$ (при любом n).

Однако в случае многообразий полугрупп мультипликативные ограничения, накладываемые на все конгруэнции всех полугрупп из многообразия, оказываются, как правило, слишком жесткими и не представляют интереса с точки зрения теории полугрупп. В частности, многообразие полугрупп

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00258) и межвузовской научной программы “Университеты России — фундаментальные исследования” Министерства образования Российской Федерации (проект № 04.01.059).

конгруэнц-n-перестановочно тогда и только тогда, когда оно является многообразием периодических групп (при $n = 2$ это доказано в [13], а при произвольном n — в [7]).

Ситуация становится намного более интересной, если накладывать мультипликативные ограничения не на все, а только на вполне инвариантные конгруэнции, и не на любых полугруппах данного многообразия, а только на его свободных объектах. При этом, с одной стороны, в полном объеме сохраняются связи с тождествами в решетках многообразий, а с другой — возникают обширные и важные классы многообразий. В ряде работ (см., например, [10, 11, 19]) результаты о мультипликативных свойствах вполне инвариантных конгруэнций на относительно свободных полугруппах с успехом применялись при изучении тождеств в решетках многообразий полугрупп.

Сказанное делает естественной следующую общую задачу: изучить многообразия полугрупп, на свободных объектах которых вполне инвариантные конгруэнции удовлетворяют тому или иному мультипликативному ограничению. Ряд результатов в этом направлении получен в работах [15]–[17]. В частности, в [16] полностью описаны многообразия полугрупп с перестановочными вполне инвариантными конгруэнциями на их свободных объектах. Некоторые новые результаты автора на эту тему анонсированы в [1]. Данная работа посвящена изложению одного из этих результатов. Чтобы сформулировать его, нам понадобится ряд определений и обозначений.

Общеизвестно, что если α и β — конгруэнции на одной и той же алгебре, то их объединение $\alpha \vee \beta$ в решетке конгруэнций выражается через отношения вида $\alpha \circ_n \beta$ следующим образом:

$$\alpha \vee \beta = \alpha \cup \beta \cup \alpha\beta \cup \beta\alpha \cup \alpha\beta\alpha \cup \beta\alpha\beta \cup \cdots \cup \alpha \circ_n \beta \cup \beta \circ_n \alpha \cup \alpha \circ_{n+1} \beta \cup \cdots , \quad (0.1)$$

где $\cup$ — теоретико-множественное объединение. Ясно, что n-перестановочность конгруэнций α и β эквивалентна равенству $\alpha \vee \beta = \alpha \circ_n \beta$. С точки зрения равенства (0.1) естественно рассмотреть следующее ограничение на α и β:

$$\alpha \vee \beta = \alpha \circ_n \beta \cup \beta \circ_n \alpha \quad (0.2)$$

(или, что эквивалентно, $\alpha \circ_{n+1} \beta = \alpha \circ_n \beta \cup \beta \circ_n \alpha$). Ясно, что это свойство слабее n-перестановочности и сильнее $(n + 1)$-перестановочности. Равенство (0.1) показывает, что это, вероятно, единственное естественное ограничение на конгруэнции, расположенное “посередине” между n-перестановочностью и $(n + 1)$-перестановочностью. Поэтому мы будем называть конгруэнции α и β со свойством (0.2) $n.5$-*перестановочными.* В частности, конгруэнции α и β 2.5-перестановочны, если $\alpha \vee \beta = \alpha\beta \cup \beta\alpha$, и 1.5-перестановочны, если $\alpha \vee \beta = \alpha \cup \beta$.

Как обычно, через $\mathbb{N}$ обозначается множество всех натуральных чисел. Положим $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{n + 0.5 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Многообразие полугрупп, на всех свободных объектах которого любые две вполне инвариантные конгруэнции r-перестановочны (где $r \in \overline{\mathbb{N}}$), будем для краткости называть fi-r-*перестановочными*.

Если $r = 2$ [соответственно $r = 3$], то fi-r-перестановочные многообразия будем называть [*слабо*] *fi-перестановочными.*

В данной работе получено полное описание fi-2.5-перестановочных многообразий полугрупп. Отметим, что условие 2.5-перестановочности вполне инвариантных конгруэнций на свободных объектах многообразия уже возникало в ряде работ (см., например, [15, 18]). Как обычно, будем называть многообразие полугрупп *вполне простым*, если оно состоит из вполне простых полугрупп. Обозначим через $\mathcal{SL}$ многообразие всех полурешеток. Основным результатом работы является

Теорема. *Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ fi-2.5-перестановочно тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{V}$ — вполне простое многообразие, либо $\mathcal{V} = \mathcal{SL}$, либо $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из следующих систем тождеств:*

$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ x^2y = 0, \tag{0.3}$$
$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ xy^2 = 0, \tag{0.4}$$
$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ x^2y = xy^2,\ x^2yz = 0, \tag{0.5}$$
$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ x^2y = yx^2,\ x^3y = 0, \tag{0.6}$$
$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ x^2y = yx^2,\ x^2y^2 = 0, \tag{0.7}$$
$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ x^2y = yx^2,\ x^3y = x^2y^2,\ x^2y^2z = 0, \tag{0.8}$$
$$xyz = zyx,\ xyx = 0, \tag{0.9}$$
$$xyz = zyx,\ x^2y = yxy,\ x^2yz = 0, \tag{0.10}$$
$$xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^3y = 0, \tag{0.11}$$
$$xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^2y^2 = 0, \tag{0.12}$$
$$xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^3y = x^2y^2,\ x^2y^2z = 0, \tag{0.13}$$
$$xyz = yzx,\ x^3y = 0, \tag{0.14}$$
$$xyz = yzx,\ x^2y^2 = 0, \tag{0.15}$$
$$xyz = yzx,\ x^3y = x^2y^2,\ x^2y^2z = 0, \tag{0.16}$$
$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ x^2y = y^2x,\ xyzt = 0, \tag{0.17}$$
$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ xy^2 = yx^2,\ xyzt = 0, \tag{0.18}$$
$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},\ x^2y = yx^2,\ x_1x_2x_3x_4x_5 = 0, \tag{0.19}$$
$$xyz = zyx,\ xyx = yxy,\ xyzt = 0, \tag{0.20}$$
$$xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x_1x_2x_3x_4x_5 = 0, \tag{0.21}$$
$$xyz = yzx,\ x_1x_2x_3x_4x_5 = 0, \tag{0.22}$$

где в системах (0.3) *и* (0.17) π *— одна из перестановок* (12), (13) *и* (23), *а в системах* (0.4)–(0.8), (0.18) *и* (0.19) π *— одна из перестановок* (12) *и* (23).

Отметим, что некоторые вспомогательные результаты работы относятся к слабо fi-перестановочным многообразиям или даже к fi-r-перестановочным многообразиям при любом $r \in \overline{\mathbb{N}}$.

Многообразия, заданные системами тождеств (0.3)–(0.22), являются *нильмногообразиями*, т. е. состоят из нильполугрупп. Как мы увидим ниже, именно ниль-случай является наиболее сложным и занимает львиную часть в доказательстве теоремы. Ключевыми здесь являются результаты работ [2, 3, 14]. В первых двух из них было показано, что строение решеток нильмногообразий в значительной степени определяется строением решеток конгруэнций некоторых унарных алгебр специального вида, так называемых G-множеств. В [14] изучались решеточные и мультипликативные свойства конгруэнций на G-множествах.

Работа состоит из 4 параграфов. В §1 воспроизводятся результаты работ [2, 3, 14] (в том объеме, в каком они необходимы в данной работе) и доказываются мультипликативные аналоги результатов работ [2, 3]. В §2 и 3 излагается доказательство теоремы. В §4 приводится ряд следствий из теоремы.

Автор благодарит Л. Н. Шеврина за внимание к работе.

1 Предварительные сведения

1.1 Конгруэнции на G-множествах

Пусть A — непустое множество, G — группа, а φ — гомоморфизм из G в группу всех перестановок множества A. Каждому элементу $g \in G$ поставим в соответствие унарную операцию g^* на множестве A, задаваемую правилом: $g^*(a) = (\varphi(g))(a)$ для всякого $a \in A$. Унарная алгебра с носителем A и множеством операций $\{g^* \mid g \in G\}$ называется *G-множеством*. Решетка конгруэнций G-множества A обозначается через $\mathrm{Con}(A)$. G-множество A называется *транзитивным*, если для любых $x, y \in A$ существует элемент $g \in G$ такой, что $y = g^*(x)$. Транзитивное G-подмножество G-множества A называется *орбитой* в A.

Будем называть G-множество A *сегрегированным*, если для любой конгруэнции α на A и любых двух различных орбит B и C в A выполнено следующее условие: из того, что $b\,\alpha\,c$ для некоторых элементов $b \in B$ и $c \in C$, вытекает, что $x\,\alpha\,y$ для любых элементов $x, y \in B \cup C$. Из предложения 1.3 работы [14] вытекает

Лемма 1.1 *Если G-множество сегрегировано, то любые две его различные неодноэлементные орбиты не изоморфны.* □

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 1.2 *Если G-множество A содержит не более одной неодноэлементной орбиты, то оно сегрегировано.* □

Будем говорить, что G-множество A *конгруэнц-r-перестановочно* (где $r \in \overline{\mathbb{N}}$), если любые две конгруэнции на A r-перестановочны. Если $r = 2$ [соответственно $r = 3$], то конгруэнц-r-перестановочные G-множества будем, как обычно, называть [*слабо*] *конгруэнц-перестановочными*. Через $\mathbf{M}_3$ будем обозначать многообразие решеток, порожденное 5-элементной модулярной недистрибутивной решеткой. Следующие два утверждения являются частными случаями соответственно теорем 2.2 и 3.4 работы [14].

Предложение 1.1 *Решетка конгруэнций G-множества A принадлежит $\mathbf{M}_3$ тогда и только тогда, когда A сегрегировано и содержит не более 3 орбит, а решетка конгруэнций каждой орбиты этого G-множества принадлежит $\mathbf{M}_3$.* □

Предложение 1.2 *Пусть $r \in \{2.5, 3\}$. G-множество A конгруэнц-r-перестановочно тогда и только тогда, когда A сегрегировано и содержит не более 3 орбит, а каждая орбита этого G-множества конгруэнц-r-перестановочна.* □

Предложения 1.1 и 1.2 описывают G-множества с рассматриваемыми в них свойствами по модулю орбит, т. е. транзитивных G-подмножеств данного G-множества. Оставшаяся часть данного пункта посвящена конгруэнциям транзитивных G-множеств. Пусть A есть G-множество и $a \in A$. Положим $\mathrm{Stab}_A(a) = \{g \in G \,|\, g^*(a) = a\}$. Ясно, что $\mathrm{Stab}_A(a)$ — подгруппа в G. Как обычно, через $\mathrm{Sub}(G)$ мы обозначаем решетку подгрупп группы G. Нам понадобится следующая хорошо известная лемма (см., например, [8], лемма 4.20).

Лемма 1.3 *Решетка конгруэнций транзитивного G-множества A изоморфна интервалу $[\mathrm{Stab}_A(a), G]$ решетки $\mathrm{Sub}(G)$, где a — произвольный элемент из A.* □

Если P и Q — подмножества группы G, то, как обычно, через PQ обозначается множество $\{pq \,|\, p \in P, q \in Q\}$. Пусть H_1, H_2 — подгруппы группы G, а n — натуральное число. Положим $H_1 \circ_n H_2 = H_1H_2H_1H_2\cdots$, где число сомножителей в правой части равенства равно n. Подгруппы H_1 и H_2 назовем *n-перестановочными*, если $H_1 \circ_n H_2 = H_2 \circ_n H_1$, и *$n.5$-перестановочными*, если $H_1 \vee H_2 = H_1 \circ_n H_2 \cup H_2 \circ_n H_1$, где $\vee$ — объединение в решетке $\mathrm{Sub}(G)$, а $\cup$ — теоретико-множественное объединение. Из леммы 2.10 работы [15] непосредственно вытекает следующий мультипликативный аналог леммы 1.3.

Лемма 1.4 *Пусть $r \in \overline{\mathbb{N}}$. Транзитивное G-множество A конгруэнц-r-перестановочно тогда и только тогда, когда любые две группы из интервала $[\mathrm{Stab}_A(a), G]$ решетки $\mathrm{Sub}(G)$ r-перестановочны, где a — произвольный элемент из A.* □

Как обычно, через $\mathbf{S}_n$ обозначается симметрическая группа n-ной степени. Следующая лемма проверяется непосредственно.

Лемма 1.5 *Подгруппы группы $\mathbf{S}_3$, порожденные двумя ее различными транспозициями, не являются 2.5-перестановочными.* $\square$

Нам понадобится также следующий факт.

Лемма 1.6 *Если транзитивное G-множество A содержит не более трех элементов, то решетка его конгруэнций содержит не более двух элементов.*

Доказательство. Если $|A| \leqslant 2$, то заключение леммы очевидно. Пусть теперь $|A| = 3$, скажем, $A = \{x, y, z\}$. Пусть α — конгруэнция на A, отличная от отношения равенства. Без ограничения общности можно считать, что $x \, \alpha \, y$. В силу транзитивности A существует элемент $g \in G$ такой, что $z = g^*(x)$. Случай, когда $g^*(y) = z$, невозможен, так как в этом случае $g^*(x) = g^*(y)$, и потому $x = y$. Следовательно, $z = g^*(x) \, \alpha \, g^*(y) \in \{x, y\}$. Это означает, что α — универсальное отношение. $\square$

1.2 О решетках нильмногообразий полугрупп

В этом пункте под словом "полугруппа" понимается полугруппа с сигнатурным нулем. Тем не менее, все сказанное ниже справедливо и для обычных полугрупповых многообразий, поскольку, как показано в работе [9], решетка нильмногообразий полугрупп с сигнатурным нулем изоморфна решетке нильмногообразий полугрупп в обычной полугрупповой сигнатуре.

Всюду далее буквой F обозначается свободная полугруппа над алфавитом $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots\}$. Символом $\equiv$ обозначается равенство в F. Нам понадобятся следующие обозначения, связанные с произвольным ненулевым словом u: $\ell(u)$ — длина слова u; $\ell_x(u)$ — число вхождений буквы x в слово u; $c(u)$ — множество всех букв, входящих в запись u; $n(u)$ — число букв, входящих в запись слова u. Будем говорить, что слово u *делит* слово v и писать $u \lhd v$, если $v \equiv a\xi(u)b$ для некоторых (возможно, пустых) слов a и b и некоторого эндоморфизма ξ полугрупы F. Далее, будем говорить, что слово u *делит слово v в многообразии $\mathcal{V}$* и писать $u \overset{\mathcal{V}}{\lhd} v$, если u делит некоторое слово w такое, что $v = w$ в $\mathcal{V}$. Будем говорить, что слова u и v *подобны* и писать $u \approx v$, если одно из них может быть получено из другого переименованием букв. Наконец, будем говорить, что слова u и v *подобны в многообразии $\mathcal{V}$* и писать $u \overset{\mathcal{V}}{\approx} v$, если существует слово w такое, что $u \approx w$ и $v = w$ в $\mathcal{V}$.

Пусть m и n — натуральные числа и $m \leqslant n$. Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ назовем (n, m)-*расщепляемым*, если из выполнимости в $\mathcal{V}$ тождества $u = v$

такого, что $\ell(u) = n$, $n(u) = m$ и $\ell(v) > n$, вытекает, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u = 0$. Многообразие, являющееся (n, m)-расщепляемым для всех n и m таких, что $n \geqslant m$, будем называть *однородным*. Многообразие, все подмногообразия которого (n, m)-расщепляемы [однородны], будем называть *наследственно (n, m)-расщепляемым* [*наследственно однородным*]. Легко понять, что всякое наследственно однородное многообразие является нильмногообразием.

Тот факт, что в многообразии $\mathcal{V}$ не выполнено тождество $u = 0$, будем для краткости записывать в виде "$u \neq 0$ в $\mathcal{V}$". Положим

$$F_{n,m}(\mathcal{V}) = \{u \in F \mid \ell(u) = n,\ c(u) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \quad u \neq 0 \quad \mathcal{V}\}.$$

Пусть, далее, $W_{n,m}(\mathcal{V})$ — подмножество в $F_{n,m}(\mathcal{V})$ со следующим свойством: для всякого $u \in F_{n,m}(\mathcal{V})$ существует, и притом только одно, слово u^* такое, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u = u^*$. Положим

$$W^0_{n,m}(\mathcal{V}) = W_{n,m}(\mathcal{V}) \cup \{0\}.$$

Множество $W_{n,m}(\mathcal{V})$ будем называть *трансверсалью*, а множество $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ — 0-*трансверсалью*. Отметим, что множество $F_{n,m}(\mathcal{V})$ может быть пустым (если все слова длины n от m букв равны 0 в $\mathcal{V}$). Ясно, что в этом случае множество $W_{n,m}(\mathcal{V})$ также пусто. Но множество $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ всегда непусто, так как содержит 0.

Определим действие группы $\mathbf{S}_m$ на множестве $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. Если $u \in F$, $c(u) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ и $\sigma \in \mathbf{S}_m$, то через $u\sigma$ будем обозначать образ слова u при эндоморфизме полугруппы F, продолжающем отображение $x_i \longmapsto x_{i\sigma}$ (мы считаем, что $i\sigma = i$ при $i > m$). Ясно, что если $u \in F_{n,m}(\mathcal{V})$, то $u\sigma \in F_{n,m}(\mathcal{V})$ и мы можем рассматривать слово $(u\sigma)^*$. Для всякого $\sigma \in \mathbf{S}_m$ положим $\sigma^*(u) \equiv (u\sigma)^*$ для всякого $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$ и $\sigma^*(0) \equiv 0$. Легко проверить, что если многообразие $\mathcal{V}$ (n, m)-расщепляемо, то множество $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ с набором операций $\{\sigma^* \mid \sigma \in \mathbf{S}_m\}$ является $\mathbf{S}_m$-множеством, а если, кроме того, $W_{n,m}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, то $W_{n,m}(\mathcal{V})$ является $\mathbf{S}_m$-подмножеством в $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ (это вытекает из доказательства леммы 1.1 в [2]). Отметим еще, что $\{0\}$ всегда является орбитой в $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ и что любые два слова из одной и той же орбиты трансверсали $W_{n,m}(\mathcal{V})$ подобны.

Предложение 1.3 ([3], следствие 1) *Решетка подмногообразий наследственно однородного многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ антиизоморфна подпрямому произведению решеток вида* $\mathrm{Con}(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ *по всем n и m таким, что $m \leqslant n$.* □

Для удобства ссылок сформулируем в явном виде следующую лемму, вытекающую из доказательства теоремы 1.3 работы [2].

Лемма 1.7 *Пусть m и n — натуральные числа такие, что $m \leqslant n$, а $\mathcal{V}$ — (n, m)-расщепляемое нильмногообразие полугрупп. Если α — вполне инвариантная конгруэнция на полугруппе F, отвечающая некоторому подмногообразию многообразия $\mathcal{V}$, то ограничение конгруэнции α на множество $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ является конгруэнцией этого $\mathbf{S}_m$-множества. Обратно, всякая конгруэнция $\mathbf{S}_m$-множества $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ является ограничением на $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ некоторой вполне инвариантной конгруэнции на полугруппе F, отвечающей некоторому подмногообразию многообразия $\mathcal{V}$.* $\square$

1.3 Мультипликативные аналоги предложения 1.3

Следующая непосредственно проверяемая лемма показывает, что при изучении мультипликативного поведения вполне инвариантных конгруэнций на относительно свободных полугруппах мы можем рассматривать вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F. Это позволит нам существенно упростить дальнейшие рассуждения, так как с элементами полугруппы F (т. е. с обычными полугрупповыми словами) работать намного проще, чем с элементами относительно свободных полугрупп.

Лемма 1.8 *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп, ν — вполне инвариантная конгруэнция на полугруппе F, отвечающая многообразию $\mathcal{V}$, а $r \in \overline{\mathbb{N}}$. Многообразие $\mathcal{V}$ fi-r-перестановочно тогда и только тогда, когда вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F, содержащие ν, r-перестановочны.* $\square$

Напомним, что многообразие полугрупп называется *локально нильпотентным*, если всякая его конечно порожденная полугруппа нильпотентна. Нам многократно придется использовать следующие три технических замечания о тождествах нильполугрупп. Первое из них очевидно, второе вытекает из леммы 1 работы [5], а третье доказано в [17], лемма 1.3(iii).

Лемма 1.9 *Пусть $\mathcal{V}$ — нильмногообразие полугрупп.*

а) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = v$ такому, что $c(u) \neq c(v)$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также тождеству $u = 0$.*

б) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $x_1x_2 \cdots x_n = v$, где $\ell(v) \neq n$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также тождеству $x_1x_2 \cdots x_n = 0$.*

в) *Если $\mathcal{V}$ локально нильпотентно и удовлетворяет тождеству $u = v$ такому, что $\ell(u) < \ell(v)$ и $u \lhd v$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также тождеству $u = 0$.* $\square$

Точный мультипликативный аналог предложения 1.3 мог бы выглядеть следующим образом: если $r \in \overline{\mathbb{N}}$, то наследственно однородное многообразие $\mathcal{V}$ fi-r-перестановочно тогда и только тогда, когда все 0-трансверсали вида $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ конгруэнц-r-перестановочны. Это утверждение неверно даже при $r = 2$ (явный пример, подтверждающий это, легко извлечь из результатов работ [16, 17]). Но некоторые ослабленные варианты указанного утверждения все-таки имеют место (см. предложение 1.4 и лемму 1.11 ниже).

Если $\mathcal{V}$ — (n, m)-расщепляемое нильмногообразие, а α — вполне инвариантная конгруэнция на полугруппе F, отвечающая некоторому подмногообразию многообразия $\mathcal{V}$, то ограничение α на $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ мы будем обозначать через $\alpha_{n,m}$. В силу леммы 1.7 $\alpha_{n,m}$ — конгруэнция $\mathbf{S}_m$-множества $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. В доказательстве предложения 1.4 нам понадобится следующая

Лемма 1.10 *Пусть m, n и r — натуральные числа, причем $m \leqslant n$, $\mathcal{V}$ — наследственно (n, m)-расщепляемое многообразие нильполугрупп, а α и β — вполне инвариантные конгруэнции на F, отвечающие некоторым подмногообразиям многообразия $\mathcal{V}$. Если $u, v \in W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ и $(u, v) \in \alpha \circ_r \beta$, то $(u, v) \in \alpha_{n,m} \circ_r \beta_{n,m}$.*

Доказательство. По условию существует последовательность слов u_0, $u_1, \ldots, u_r \in F$ такая, что $u_0 \equiv u$, $u_r \equiv v$ и для всякого $i = 0, 1, \ldots, r-1$ пара (u_i, u_{i+1}) принадлежит α при четном i и β при нечетном i. Поскольку α и β отвечают подмногообразиям многообразия $\mathcal{V}$, мы всегда можем заменить каждое из слов $u_0, u_1, \ldots, u_r$ на слово, равное ему в $\mathcal{V}$. Это позволяет считать, что каждое из слов $u_0, u_1, \ldots, u_r$ принадлежит некоторой 0-трансверсали вида $W^0_{k,\ell}(\mathcal{V})$. В частности, для всякого $i = 0, 1, \ldots, r$ либо $u_i \equiv 0$, либо $u_i \neq 0$ в $\mathcal{V}$. Если $u \equiv v$, то доказывать нечего. В частности, это позволяет считать, что по крайней мере одно из слов u и v не равно 0 в $\mathcal{V}$. Без ограничения общности будем считать, что $u \neq 0$ в $\mathcal{V}$, и значит $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$.

Если $u_i \in W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ для всех $i = 0, 1, \ldots, r$, то $(u, v) \in \alpha_{n,m} \circ_r \beta_{n,m}$. Предположим теперь, что существует i такое, что $u_i \notin W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. Пусть i — наименьший индекс с таким свойством. Ясно, что $i > 0$. Пара (u_{i-1}, u_i) принадлежит одной из конгруэнций α и β и $u_{i-1} \in W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. Ясно, что либо $u_{i-1} \equiv 0$, либо $c(u_{i-1}) \neq c(u_i)$, либо $\ell(u_{i-1}) \neq \ell(u_i)$. Из леммы 1.9а) и того факта, что многообразие $\mathcal{V}$ наследственно (n, m)-расщепляемо, вытекает, что та из конгруэнций α и β, которая содержит пару (u_{i-1}, u_i), содержит и пару $(u_{i-1}, 0)$. Аналогичные рассуждения показывают, что если j — наибольший индекс такой, что $u_j \notin W^0_{n,m}(\mathcal{V})$, то $i \leqslant j < r$ и та из конгруэнций α и β, которая содержит пару (u_j, u_{j+1}), содержит и пару $(u_{j+1}, 0)$. В последовательности слов $u_0, u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_{j+1}, \ldots, u_r$ каждое слово принадлежит $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$, а любая пара соседних слов принадлежит либо α, либо β. Следовательно, любая пара соседних слов в этой последовательности принадлежит либо $\alpha_{n,m}$, либо $\beta_{n,m}$. Учитывая, что длина этой последовательности не превосходит r, а $(u_0, u_1) \in \alpha$, получаем, что $(u, v) \in \alpha_{n,m} \circ_r \beta_{n,m}$. □

Предложение 1.4 *Пусть $\mathcal{V}$ — нильмногообразие полугрупп, m и n — натуральные числа такие, что $m \leqslant n$, а $r \in \overline{\mathbb{N}}$. Если многообразие $\mathcal{V}$ наследственно (n,m)-расщепляемо и fi-r-перестановочно, то $\mathbf{S}_m$-множество $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ конгруэнц-r-перестановочно.*

Доказательство. Обозначим через ν вполне инвариантную конгруэнцию на полугруппе F, отвечающую многообразию $\mathcal{V}$. В силу леммы 1.8 любые две вполне инвариантные конгруэнции на F, содержащие ν, r-перестановочны.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathrm{Con}(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$. Требуется доказать, что α и β r-перестановочны. В силу леммы 1.7, если $\mu \in \mathrm{Con}(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$, то $\mu = \overline{\mu}_{n,m}$ для некоторой вполне инвариантной конгруэнции $\overline{\mu}$ на F, содержащей ν.

Предположим сначала, что r — натуральное число. В силу соображений симметрии достаточно доказать, что $\alpha \circ_r \beta \subseteq \beta \circ_r \alpha$. Пусть $u, v \in W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ и $(u,v) \in \alpha \circ_r \beta$. Тогда $(u,v) \in \overline{\alpha} \circ_r \overline{\beta}$. Следовательно, $(u,v) \in \overline{\beta} \circ_r \overline{\alpha}$. В силу леммы 1.10 $(u,v) \in \beta \circ_r \alpha$.

Предположим теперь, что $r = s + 0.5$ для некоторого натурального s. Достаточно проверить, что $\alpha \circ_{s+1} \beta \subseteq \alpha \circ_s \beta \cup \beta \circ_s \alpha$. Пусть $u, v \in W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ и $(u,v) \in \alpha \circ_{s+1} \beta$. Ясно, что $(u,v) \in \overline{\alpha} \circ_{s+1} \overline{\beta}$. Поскольку конгруэнции $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ $s.5$-перестановочны, получаем, что $(u,v) \in \overline{\alpha} \circ_s \overline{\beta} \cup \overline{\beta} \circ_s \overline{\alpha}$, т. е. либо $(u,v) \in \overline{\alpha} \circ_s \overline{\beta}$, либо $(u,v) \in \overline{\beta} \circ_s \overline{\alpha}$. Из леммы 1.10 вытекает, что в первом случае $(u,v) \in \alpha \circ_s \beta$, а во втором $(u,v) \in \beta \circ_s \alpha$. Таким образом, $(u,v) \in \alpha \circ_s \beta \cup \beta \circ_s \alpha$. □

Напомним, что многообразие полугрупп называется *перестановочным*, если оно удовлетворяет *перестановочному* тождеству, т. е. тождеству вида

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_{1\pi} x_{2\pi} \cdots x_{n\pi}, \tag{1.1}$$

где $\pi \in \mathbf{S}_n$. Число n называется *длиной* тождества (1.1). Если $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп, то через $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ обозначается множество всех перестановок $\pi \in \mathbf{S}_n$ таких, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (1.1). Ясно, что $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ — подгруппа в $\mathbf{S}_n$.

Из предложения 1.4 вытекает

Следствие 1.1 *Пусть $\mathcal{V}$ — нильмногообразие полугрупп, n — натуральное число, а $r \in \overline{\mathbb{N}}$. Если $W_{n,n}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, то $W_{n,n}(\mathcal{V})$ является $\mathbf{S}_n$-множеством, которое конгруэнц-r-перестановочно тогда и только тогда, когда все группы из интервала $[\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}), \mathbf{S}_n]$ решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_n)$ r-перестановочны.*

Доказательство. Для краткости положим $W = W_{n,n}(\mathcal{V})$ и $W^0 = W^0_{n,n}(\mathcal{V})$. Из леммы 1.9б) вытекает, что всякое многообразие нильполугрупп наследственно (n,n)-расщепляемо, и потому W^0 и W являются $\mathbf{S}_n$-множествами. В силу предложения 1.4 $\mathbf{S}_n$-множество W^0 конгруэнц-r-перестановочно. Следовательно, его $\mathbf{S}_n$-подмножество W также конгруэнц-r-перестановочно. Ясно, что W транзитивно. Легко понять, что $\mathrm{Stab}_W(x_1x_2\cdots x_n)=\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ (см. [17], доказательство следствия 1.7). Остается сослаться на лемму 1.4. $\square$

Из предложения 1.4 вытекает, в частности, что если многообразие $\mathcal{V}$ наследственно однородно, а $r\in\overline{\mathbb{N}}$, то из fi-r-перестановочности многообразия $\mathcal{V}$ следует, что все 0-трансверсали вида $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ конгруэнц-r-перестановочны. Обратное утверждение в общем случае неверно, но можно проверить, что оно справедливо при выполнении следующих двух дополнительных ограничений, ни от одного из которых отказаться нельзя: $r\geqslant 2.5$, а все непустые трансверсали вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$ транзитивны. Мы не будем приводить здесь доказательство этого факта, поскольку в данной работе он нам не понадобится. При $r\in\{2.5,3\}$ справедлив следующий усиленный вариант указанного утверждения, который пригодится нам в §3.

Лемма 1.11 *Пусть $r\in\{2.5,3\}$, $\mathcal{V}$ — наследственно однородное многообразие полугрупп и выполнены следующие условия:*

а) *все 0-трансверсали вида $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ конгруэнц-r-перестановочны;*

б) *среди непустых трансверсалей вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$ не более чем одна не является транзитивной;*

в) *если $W_{n,m}(\mathcal{V})\neq\varnothing$, трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{V})$ нетранзитивна, $w\neq 0$ в $\mathcal{V}$ и $w\notin F_{n,m}(\mathcal{V})$, то либо w делит в $\mathcal{V}$ некоторое слово из $W_{n,m}(\mathcal{V})$, либо любое слово из $W_{n,m}(\mathcal{V})$ делит в $\mathcal{V}$ слово w.*

Тогда $\mathcal{V}$ fi-r-перестановочно.

Доказательство. Пусть ν — вполне инвариантная конгруэнция на полугруппе F, отвечающая многообразию $\mathcal{V}$, а α и β — вполне инвариантные конгруэнции на F, содержащие ν. В силу леммы 1.8 достаточно проверить, что α и β r-перестановочны.

Пусть $u,v\in F$ и $(u,v)\in\alpha\beta\alpha$, т. е. $u\,\alpha\,w_1\,\beta\,w_2\,\alpha\,v$ для некоторых слов w_1,w_2. Требуется доказать, что если $r=2.5$, то $(u,v)\in\alpha\beta\cup\beta\alpha$, а если $r=3$, то $(u,v)\in\beta\alpha\beta$. Поскольку $\alpha,\beta\supseteq\nu$, мы всегда можем заменить любое из слов u,w_1,w_2,v на слово, равное ему в $\mathcal{V}$. Это позволяет считать, что каждое из слов u, w_1, w_2, v лежит в некоторой 0-трансверсали вида $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. В частности, каждое из этих слов либо совпадает с 0, либо не равно 0 в $\mathcal{V}$. Кроме того, можно считать, что слова u, w_1, w_2, v попарно различны, так как в противном случае, очевидно, $(u,v)\in\alpha\beta\cup\beta\alpha\subseteq\beta\alpha\beta$. В частности, одно из слов u и v не равно 0 в $\mathcal{V}$. Без ограничения общности можно считать, что $u\neq 0$ в $\mathcal{V}$, и значит $u\in W_{n,m}(\mathcal{V})$ для некоторых n и m.

В силу условия а) 0-трансверсаль $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ конгруэнц-r-перестановочна. Из предложения 1.2 вытекает, что эта 0-трансверсаль содержит не более трех орбит. Следовательно, трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{V})$ содержит не более двух орбит.

В частности, если она не транзитивна, то она содержит ровно две орбиты. Дальнейшие рассмотрения разбиваются на 6 случаев.

Случай 1: $w_1, w_2, v \in W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. В этом случае $(u,v) \in \alpha_{n,m}\beta_{n,m}\alpha_{n,m}$. По условию а) отсюда вытекает, что если $r = 2.5$, то $(u,v) \in \alpha_{n,m}\beta_{n,m} \cup \beta_{n,m}\alpha_{n,m} \subseteq \alpha\beta \cup \beta\alpha$, а если $r = 3$, то $(u,v) \in \beta_{n,m}\alpha_{n,m}\beta_{n,m} \subseteq \beta\alpha\beta$.

Случай 2: $w_1, w_2 \in W_{n,m}(\mathcal{V})$, а $v \in W_{k,\ell}(\mathcal{V})$ для некоторой трансверсали $W_{k,\ell}(\mathcal{V})$, отличной от $W_{n,m}(\mathcal{V})$. В силу наследственной однородности многообразия $\mathcal{V}$ отсюда вытекает, что конгруэнция α содержит пары $(w_2, 0)$ и $(v, 0)$. Если трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{V})$ транзитивна, то $u \approx w_2$. Но тогда вместе с парой $(w_2, 0)$ конгруэнция α содержит пару $(u, 0)$, откуда $u \,\alpha\, 0 \,\alpha\, v$, т. е. $u \,\alpha\, v$. Предположим теперь, что трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{V})$ не транзитивна. Из сказанного выше вытекает, что она содержит ровно две орбиты. По принципу Дирихле по крайней мере два из слов u, w_1, w_2 лежат в одной и той же орбите, а значит подобны. Если $w_1 \approx w_2$, то конгруэнция α вместе с парой $(w_2, 0)$ содержит пару $(w_1, 0)$. Но тогда $u \,\alpha\, w_1 \,\alpha\, 0 \,\alpha\, v$, т. е. $u \,\alpha\, v$. Аналогично, если $u \approx w_2$, то конгруэнция α вместе с парой $(w_2, 0)$ содержит пару $(u, 0)$, и потому $u \,\alpha\, 0 \,\alpha\, v$, т. е. вновь $u \,\alpha\, v$. Осталось рассмотреть случай, когда $u \approx w_1$. Напомним, что $w_1 \,\beta\, w_2$. Следовательно, $u \,\beta\, w_2'$ для некоторого слова w_2' такого, что $w_2' \approx w_2$. Но тогда конгруэнция α вместе с парой $(w_2, 0)$ содержит пару $(w_2', 0)$, и потому $u \,\beta\, w_2' \,\alpha\, 0 \,\alpha\, v$, т. е. $(u,v) \in \beta\alpha$.

Случай 3: $w_1 \in W_{n,m}(\mathcal{V})$, а $w_2 \equiv 0$. Если $v \in W^0_{n,m}(\mathcal{V})$, то мы приходим к случаю 1. Поэтому можно считать, что $v \in W_{k,\ell}(\mathcal{V})$ для некоторой трансверсали $W_{k,\ell}(\mathcal{V})$, отличной от $W_{n,m}(\mathcal{V})$. Если трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{V})$ транзитивна, то $u \approx w_1$. Но тогда вместе с парой $(w_1, 0)$ конгруэнция β содержит пару $(u, 0)$. Следовательно, $u \,\beta\, 0 \,\alpha\, v$, т. е. $(u,v) \in \beta\alpha$. Аналогично разбирается случай, когда трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{V})$ не транзитивна, но слова u и w_1 лежат в одной и той же орбите этой трансверсали. Предположим теперь, что трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{V})$ не транзитивна и слова u и w_1 лежат в различных ее орбитах. Из сказанного выше вытекает, что $W_{n,m}(\mathcal{V})$ содержит ровно две орбиты. По условию в) либо v делит в $\mathcal{V}$ некоторое слово из $W_{n,m}(\mathcal{V})$, либо любое слово из $W_{n,m}(\mathcal{V})$ делит в $\mathcal{V}$ слово v. Предположим сначала, что v делит в $\mathcal{V}$ некоторое слово w из $W_{n,m}(\mathcal{V})$. Ясно, что тогда v делит в $\mathcal{V}$ любое слово из той орбиты трансверсали $W_{n,m}(\mathcal{V})$, которая содержит слово w. Поскольку орбит в этой трансверсали всего две, а слова u и w_1 лежат в различных ее орбитах, получаем, что v делит в $\mathcal{V}$ одно из слов u и w_1. Если $v \overset{\mathcal{V}}{\lhd} u$, то конгруэнция α вместе с парой $(v, 0)$ содержит пару $(u, 0)$, откуда $u \,\alpha\, 0 \,\alpha\, v$, т. е. $u \,\alpha\, v$. Если же $v \overset{\mathcal{V}}{\lhd} w_1$, то конгруэнция α вместе с парой $(v, 0)$ содержит пару $(w_1, 0)$. Но тогда $u \,\alpha\, w_1 \,\alpha\, 0 \,\alpha\, v$, т. е. вновь $u \,\alpha\, v$. Осталось рассмотреть случай, когда любое слово из $W_{n,m}(\mathcal{V})$ делит в $\mathcal{V}$ слово v. В частности, $w_1 \overset{\mathcal{V}}{\lhd} v$. Следовательно, конгруэнция β вместе с парой $(w_1, 0)$ содержит пару $(v, 0)$. Но тогда $u \,\alpha\, w_1 \,\beta\, 0 \,\beta\, v$, т. е. $(u,v) \in \alpha\beta$.

Случай 4: $w_1 \in W_{n,m}(\mathcal{V})$, а $w_2 \in W_{k,\ell}(\mathcal{V})$ для некоторой трансверсали $W_{k,\ell}(\mathcal{V})$, отличной от $W_{n,m}(\mathcal{V})$. В силу наследственной однородности многообразия $\mathcal{V}$ отсюда вытекает, что конгруэнция β содержит пары $(w_1, 0)$ и $(w_2, 0)$. Если $v \equiv 0$, то $u\,\alpha\, w_1\,\beta\, v$, т. е. $(u, v) \in \alpha\beta$. Если v принадлежит некоторой трансверсали, отличной от $W_{k,\ell}(\mathcal{V})$, то, в силу наследственной однородности многообразия $\mathcal{V}$, конгруэнция α содержит пару $(v, 0)$. Таким образом, $u\,\alpha\, w_1\,\beta\, 0\,\alpha\, v$, и мы получили ситуацию, рассмотренную в случае 3. Пусть, наконец, $v \in W_{k,\ell}(\mathcal{V})$. По условию б) по крайней мере одна из трансверсалей $W_{n,m}(\mathcal{V})$ и $W_{k,\ell}(\mathcal{V})$ транзитивна. Если транзитивна трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{V})$, то $u \approx w_1$. Но тогда конгруэнция β вместе с парой $(w_1, 0)$ содержит пару $(u, 0)$, откуда $u\,\beta\, 0\,\beta\, w_2\,\alpha\, v$, т. е. $(u, v) \in \beta\alpha$. Если же транзитивна трансверсаль $W_{k,\ell}(\mathcal{V})$, то $v \approx w_2$. Но тогда конгруэнция β вместе с парой $(w_2, 0)$ содержит пару $(v, 0)$, откуда $u\,\alpha\, w_1\,\beta\, 0\,\beta\, v$, т. е. $(u, v) \in \alpha\beta$.

Случай 5: $w_1 \equiv 0$. В этом случае $w_2, v \not\equiv 0$. Если слова w_2 и v лежат в одной и той же трансверсали, то мы получаем ситуацию, двойственную к случаю 3. Если же слова w_2 и v лежат в различных трансверсалях, то, в силу наследственной однородности многообразия $\mathcal{V}$, конгруэнция α содержит пару $(v, 0)$. Но тогда $u\,\alpha\, 0\,\alpha\, v$, т. е. $u\,\alpha\, v$.

Случай 6: $w_1 \in W_{k,\ell}(\mathcal{V})$ для некоторой трансверсали $W_{k,\ell}(\mathcal{V})$, отличной от $W_{n,m}(\mathcal{V})$. В силу наследственной однородности многообразия $\mathcal{V}$ отсюда вытекает, что конгруэнция α содержит пару $(u, 0)$. Если $v \equiv 0$, то мы сразу получаем, что $u\,\alpha\, v$. Если $w_2 \equiv 0$, то $u\,\alpha\, w_2\,\alpha\, v$, т. е. вновь $u\,\alpha\, v$. Если слова w_2 и v лежат в одной и той же трансверсали, то мы получаем ситуацию, двойственную либо к случаю 2 (если $w_2, v \in W_{k,\ell}(\mathcal{V})$), либо к случаю 4 (если $w_2, v \notin W_{k,\ell}(\mathcal{V})$). Поэтому можно считать, что слова w_2 и v лежат в различных трансверсалях. Но тогда из наследственной однородности многообразия $\mathcal{V}$ вытекает, что конгруэнция α содержит пару $(v, 0)$. Следовательно, $u\,\alpha\, 0\,\alpha\, v$, т. е. $u\,\alpha\, v$. $\square$

2 Доказательство теоремы: необходимость

Обозначим через $\mathcal{ZM}$ многообразие всех полугрупп с нулевым умножением. Напомним, что многообразие полугрупп называется *вполне регулярным*, если всякая его полугруппа есть объединение групп. Следующие две леммы обобщают, соответственно, леммы 1.6 и 1.5 работы [16].

Лемма 2.1 *Если многообразие полугрупп слабо fi-перестановочно, то оно либо вполне регулярно, либо является нильмногообразием.*

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [6]), что $\mathcal{ZM}$ является атомом решетки всех многообразий полугрупп и что многообразие полугрупп вполне регулярно [является нильмногообразием] тогда и только тогда, когда оно не содержит $\mathcal{ZM}$ [когда решетка его подмногообразий не содержит атомов, отличных от $\mathcal{ZM}$]. Пусть $\mathcal{V}$ — слабо fi-перестановочное многообразие полугрупп. Предположим, что $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{ZM}$. В силу сказанного достаточно убедиться в том, что $L(\mathcal{V})$ не содержит атомов, отличных от $\mathcal{ZM}$. Пусть, напротив, $L(\mathcal{V})$ содержит атом $\mathcal{A}$, отличный от $\mathcal{ZM}$. Пусть α и ζ — вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F, отвечающие многообразиям $\mathcal{A}$ и $\mathcal{ZM}$ соответственно. Поскольку многообразие $\mathcal{ZM} \wedge \mathcal{A}$ тривиально, вполне инвариантная конгруэнция $\zeta \vee \alpha$ совпадает с универсальным отношением ∇ на F. Поскольку, в силу леммы 1.8, конгруэнции ζ и α слабо перестановочны, мы получаем, что $\zeta\alpha\zeta = \nabla$. В частности, $(x, y) \in \zeta\alpha\zeta$ для любых двух различных букв x, y. Это означает, что $x\,\zeta\,u\,\alpha\,v\,\zeta\,y$ для некоторых слов u и v. Из того, что в многообразии $\mathcal{ZM}$ выполнены тождества $x = u$ и $v = y$, вытекает, что $u \equiv x$ и $v \equiv y$. Но тогда из того, что $u\,\alpha\,v$, следует, что $\mathcal{A}$ удовлетворяет тождеству $x = y$ вопреки выбору $\mathcal{A}$. $\square$

Лемма 2.2 *Если вполне регулярное многообразие полугрупп fi-2.5-перестановочно, то оно либо является вполне простым многообразием, либо совпадает с $\mathcal{SL}$.*

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [6]), что вполне регулярное многообразие полугрупп является вполне простым тогда и только тогда, когда оно не содержит многообразия $\mathcal{SL}$ (являющегося атомом решетки всех многообразий полугрупп), и что решетка подмногообразий всякого многообразия, строго содержащего $\mathcal{SL}$, содержит атом, отличный от $\mathcal{SL}$. Пусть $\mathcal{V}$ — fi-2.5-перестановочное вполне регулярное многообразие полугрупп. Предположим, что $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$. В силу сказанного достаточно проверить, что $L(\mathcal{V})$ не содержит атомов, отличных от $\mathcal{SL}$. Пусть, наоборот, решетка $L(\mathcal{V})$ содержит, наряду с $\mathcal{SL}$, еще один атом $\mathcal{A}$. Пусть α и σ — вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F, отвечающие многообразиям $\mathcal{A}$ и $\mathcal{SL}$ соответственно. Поскольку многообразие $\mathcal{SL} \wedge \mathcal{A}$ тривиально, соответствующая ему вполне инвариантная конгруэнция $\sigma \vee \alpha$ совпадает с универсальным отношением ∇ на F. В силу леммы 1.8 конгруэнции σ и α 2.5-перестановочны, и потому $\sigma\alpha \cup \alpha\sigma = \nabla$. В частности, если x, y — различные буквы, то $(x, y) \in \sigma\alpha \cup \alpha\sigma$. Предположим сначала, что $(x, y) \in \sigma\alpha$, т. е. $x\,\sigma\,u\,\alpha\,y$ для некоторого слова u. Как хорошо известно и легко проверяется, тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{SL}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$. Поскольку $x\,\sigma\,u$, мы получаем, что $c(u) = \{x\}$, т. е. $u \equiv x^n$ для некоторого n. Из того, что $u\,\alpha\,y$, вытекает теперь, что в $\mathcal{A}$ выполнено тождество $x^n = y$. Подставляя в этом тождестве x вместо y, мы получаем $x^n = x$, и потому $x = y$. Но это противоречит выбору многообразия $\mathcal{A}$. Случай, когда $(x, y) \in \alpha\sigma$, проверяется вполне аналогично. $\square$

Пусть теперь $\mathcal{V}$ — fi-2.5-перестановочное многообразие полугрупп, но $\mathcal{V}$ не является вполне простым многообразием и $\mathcal{V} \neq \mathcal{SL}$. В силу лемм 2.1 и 2.2

$\mathcal{V}$ является нильмногообразием. Требуется доказать, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (0.3)–(0.22), где в системах (0.3)–(0.8) и (0.17)–(0.19) π имеет смысл, указанный в формулировке теоремы. Для этого нам понадобится ряд лемм.

Лемма 2.3 *Если нильмногообразие полугрупп fi-2.5-перестановочно, то оно удовлетворяет нетривиальному перестановочному тождеству длины* 3.

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — fi-2.5-перестановочное нильмногообразие полугрупп. Можно считать, что $W_{3,3}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, так как в противном случае $\mathcal{V}$ удовлетворяет любому перестановочному тождеству длины 3. Предположим, что заключение леммы неверно. Тогда $\mathrm{Perm}_3(\mathcal{V})$ — единичная группа и интервал $[\mathrm{Perm}_3(\mathcal{V}), \mathbf{S}_3]$ решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_3)$ совпадает со всей этой решеткой. В силу леммы 1.9б) многообразие $\mathcal{V}$ наследственно $(3,3)$-расщепляемо. Из предложения 1.4 вытекает, что $\mathbf{S}_3$-множество $W^0_{3,3}(\mathcal{V})$ конгруэнц-2.5-перестановочно. Следовательно, его $\mathbf{S}_3$-подмножество $W_{3,3}(\mathcal{V})$ также конгруэнц-2.5-перестановочно. Согласно следствию 1.1 это означает, что все подгруппы группы $\mathbf{S}_3$ 2.5-перестановочны. Но это противоречит лемме 1.5. □

Хорошо известно, что всякое перестановочное нильмногообразие полугрупп локально нильпотентно. Поэтому лемма 2.3 позволяет всюду далее в этом параграфе применять лемму 1.9в), что мы и будем делать без специальных оговорок.

Следующая лемма фактически доказана в [17] (см. там доказательство леммы 2.8).

Лемма 2.4 *Если нильмногообразие полугрупп удовлетворяет нетривиальному перестановочному тождеству длины 3, то оно* (3,2)*-расщепляемо.* □

Лемма 2.5 *Пусть $\mathcal{V}$ — fi-2.5-перестановочное нильмногообразие полугрупп. Тогда*

а) *$\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из тождеств*

$$x^2y = y^2x, \tag{2.1}$$
$$xy^2 = yx^2, \tag{2.2}$$
$$x^2y = xy^2, \tag{2.3}$$
$$x^2y = yx^2; \tag{2.4}$$

б) *$\mathcal{V}$ удовлетворяет либо тождеству* (2.1)*, либо одному из тождеств*

$$xyx = yxy, \tag{2.5}$$
$$x^2y = xyx, \tag{2.6}$$
$$x^2y = yxy. \tag{2.7}$$

Доказательство. Утверждения а) и б) доказываются вполне аналогично. Поэтому мы ограничимся проверкой первого из них. Прежде всего заметим, что в силу леммы 2.3 $\mathcal{V}$ удовлетворяет нетривиальному перестановочному тождеству длины 3. Из леммы 2.4 вытекает теперь, что $\mathcal{V}$ наследственно $(3,2)$-расщепляемо. В силу предложения 1.4 $\mathbf{S}_2$-множество $W^0_{3,2}(\mathcal{V})$ конгруэнц-2.5-перестановочно. Учитывая предложение 1.2 получаем, что это $\mathbf{S}_2$-множество сегрегировано. Но если $\mathcal{V}$ не удовлетворяет ни одному из тождеств (2.1)–(2.4), то $W^0_{3,2}(\mathcal{V})$ содержит две изоморфных неодноэлементных орбиты: $\{x^2y, y^2x\}$ и $\{xy^2, yx^2\}$. Лемма 1.1 показывает, что это невозможно. $\square$

Лемма 2.6 *Пусть $\mathcal{V}$ — наследственно (n,m)-расщепляемое слабо fi-перестановочное нильмногообразие полугрупп. Если множество $W_{n,m}(\mathcal{V})$ не пусто, то либо трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{V})$ транзитивна, либо $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x_1x_2\cdots x_{n+1} = 0$.*

Доказательство. Можно считать, что $m < n$, поскольку все непустые трансверсали вида $W_{n,n}(\mathcal{V})$ транзитивны. Для краткости положим $W = W_{n,m}(\mathcal{V})$ и $W^0 = W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. Предположим, что $\mathcal{V}$ не удовлетворяет тождеству $x_1x_2\cdots x_{n+1} = 0$, $W \neq \varnothing$ и трансверсаль W не транзитивна. В силу предложений 1.4 и 1.2 0-трансверсаль W^0 содержит не более трех орбит. Следовательно, трансверсаль W содержит не более двух орбит. В силу своей нетранзитивности эта трансверсаль содержит ровно две орбиты. Пусть u и v — слова из различных орбит этой трансверсали. Ясно, что многообразие $\mathcal{V}$ не удовлетворяет ни одному из тождеств $u = v$, $u = 0$ и $v = 0$.

Рассмотрим подмногообразия $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ многообразия $\mathcal{V}$, первое из которых задано внутри $\mathcal{V}$ тождествами $u = v$ и $x_1x_2\cdots x_{n+1} = 0$, а второе — тождеством $v = 0$. Из выбора слов u и v вытекает, что в $\mathcal{A}$ не выполнены тождества $u = 0$ и $v = 0$, а в $\mathcal{B}$ — тождества $u = 0$ и $x_1x_2\cdots x_{n+1} = 0$. Обозначим через α и β вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F, отвечающие многообразиям $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. В силу леммы 1.8 конгруэнции α и β слабо перестановочны. Поскольку $u\,\alpha\,v\,\beta\,0\,\alpha\,x_1x_2\cdots x_{n+1}$, получаем, что $(u, x_1x_2\cdots x_{n+1}) \in \alpha\beta\alpha$. Следовательно, $(u, x_1x_2\cdots x_{n+1}) \in \beta\alpha\beta$. Иными словами, существуют слова w_1 и w_2 такие, что $u\,\beta\,w_1\,\alpha\,w_2\,\beta\,x_1x_2\cdots x_{n+1}$. Если $w_2 \not\approx x_1x_2\cdots x_{n+1}$, то из того, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет тождеству $w_2 = x_1x_2\cdots x_{n+1}$, и леммы 1.9б) вытекает, что $x_1x_2\cdots x_{n+1} = 0$ в $\mathcal{B}$. Следовательно, $w_2 \approx x_1x_2\cdots x_{n+1}$. Если либо $\ell(w_1) \neq n$, либо $c(w_1) \neq \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, то из наследственной (n,m)-расщепляемости многообразия $\mathcal{V}$, леммы 1.9а) и того факта, что $u = w_1$ в $\mathcal{B}$, вытекает, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$, что невозможно. Пусть, наконец, $\ell(w_1) = n$ и $c(w_1) = \{x_1, x_2, \ldots x_m\}$. Напомним, что $w_2 \approx x_1x_2\cdots x_{n+1}$. Из леммы 1.9б) и того факта, что $\mathcal{A}$ удовлетворяет тождеству $w_1 = w_2$, вытекает, что $w_1 = 0$ в $\mathcal{A}$. Предположим сначала, что $w_1 \neq 0$ в $\mathcal{V}$. Тогда $w_1 \in F_{n,m}(\mathcal{V})$, и потому w_1 равно в $\mathcal{V}$ некоторому слову из W. Поскольку трансверсаль W содержит ровно две орбиты, а слова u и v лежат в различных орбитах этой трансверсали, мы получаем, что каждое слово из W подобно одному из слов u и v. Следовательно, либо $w_1 \stackrel{\mathcal{V}}{\approx} u$, либо $w_1 \stackrel{\mathcal{V}}{\approx} v$. Отсюда вытекает, что в $\mathcal{A}$ выполнено одно из тождеств $u = 0$ и $v = 0$, что вновь приводит к противоречию. Пусть, наконец, $w_1 = 0$ в $\mathcal{V}$. Тогда $w_1 = 0$ в $\mathcal{B}$, а значит и $u = 0$ в $\mathcal{B}$, что невозможно. $\square$

Лемма 2.7 *Пусть $\mathcal{V}$ — слабо fi-перестановочное нильмногообразие полугрупп.*

а) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из тождеств $xyz = yxz$ и $xyz = xzy$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также либо тождеству* (2.3), *либо одному из тождеств*

$$x^2y = 0, \tag{2.8}$$

$$xy^2 = 0, \tag{2.9}$$

$$xyzt = 0. \tag{2.10}$$

б) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $xyz = zyx$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также либо одному из тождеств* (2.6), (2.8) *и* (2.10), *либо тождеству*

$$xyx = 0. \tag{2.11}$$

Доказательство. Докажем утверждение а) (утверждение б) проверяется вполне аналогично). Можно считать, что $W_{3,2}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, так как в противном случае $\mathcal{V}$ удовлетворяет любому из тождеств (2.3), (2.8) и (2.9). В силу лемм 2.4 и 2.6 либо $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству (2.10), либо трансверсаль $W_{3,2}(\mathcal{V})$ транзитивна. Но если $\mathcal{V}$ не удовлетворяет ни одному из тождеств (2.3), (2.8) и (2.9), то слова x^2y и xy^2 принадлежат различным орбитам трансверсали $W_{3,2}(\mathcal{V})$. $\square$

Для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ положим $\mathrm{Stab}_n(i) = \{\pi \in \mathbf{S}_n \mid i\pi = i\}$. Ясно, что $\mathrm{Stab}_n(i)$ — подгруппа в $\mathbf{S}_n$. Следующая лемма непосредственно вытекает из результатов работы [12].

Лемма 2.8 *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп, удовлетворяющее нетривиальному перестановочному тождеству длины 3. Если $n \geqslant 4$, то группа $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ содержит одну из групп $\mathrm{Stab}_n(1)$ и $\mathrm{Stab}_n(n)$.* $\square$

Лемма 2.9 *Если нильмногообразие полугрупп fi-2.5-перестановочно, то оно $(4, 2)$-расщепляемо.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — fi-2.5-перестановочное нильмногообразие полугрупп. В силу леммы 2.3 $\mathcal{V}$ удовлетворяет нетривиальному перестановочному тождеству длины 3. В частности, это означает, что мы можем применять лемму 1.9в). Пусть $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = v$, где $\ell(u) = 4$, $n(u) = 2$ и $\ell(v) > 4$. В силу леммы 1.9а) можно считать, что $c(u) = c(v)$. Из леммы 2.8 вытекает, что u подобно в $\mathcal{V}$ одному из слов x^3y, xy^3 и x^2y^2. Поэтому мы можем считать, что u совпадает с одним из этих трех слов. В частности, $c(u) = c(v) = \{x, y\}$. Положим $k = \ell_x(v)$ и $\ell = \ell_y(v)$. Если $k \geqslant 4$ или $\ell \geqslant 4$, то $u \lhd v$ и $u = 0$ в $\mathcal{V}$ в силу леммы 1.9в). Поскольку $\ell(v) \geqslant 5$, мы получаем, что либо $k = \ell = 3$, либо $k = 3$, а $\ell = 2$, либо $k = 2$, а $\ell = 3$. В силу леммы 2.8 v равно в $\mathcal{V}$ одному из слов x^3y^3, y^3x^3, x^3y^2, y^3x^2, x^2y^3 и y^2x^3. Поэтому можно считать, что v совпадает с одним из этих шести слов. Из леммы 1.9в) немедленно вытекает нужное нам заключение при условии, что либо $u \equiv x^2y^2$, либо $v \in \{x^3y^3, y^3x^3\}$, либо $u \equiv x^3y$, а $v \in \{x^3y^2, y^3x^2\}$, либо $u \equiv xy^3$, а $v \in \{x^2y^3, y^2x^3\}$. Остаются две возможности: либо $u \equiv x^3y$, а $v \in \{x^2y^3, y^2x^3\}$, либо $u \equiv xy^3$, а $v \in \{x^3y^2, y^3x^2\}$. В силу леммы 2.5а) $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из тождеств (2.1)–(2.4). Предположим сначала, что в $\mathcal{V}$ выполнено одно из тождеств (2.1)–(2.3). Подставляя в каждое из этих тождеств x^2 вместо x получаем, что в $\mathcal{V}$ выполнено одно из тождеств $x^4y = y^2x^2$, $x^2y^2 = yx^4$ и $x^4y = x^2y^2$. В любом случае из леммы 1.9в) вытекает, что $x^2y^2 = 0$ в $\mathcal{V}$, и потому в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $v = 0$. Осталось рассмотреть случай, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству (2.4). Если $u \equiv x^3y$, а $v \in \{x^2y^3, y^2x^3\}$, то v равно в $\mathcal{V}$ одному из слов y^3x^2 и x^3y^2, и потому $u \overset{\mathcal{V}}{\lhd} v$. В силу леммы 1.9в) в этом случае $u = 0$ в $\mathcal{V}$. Случай, когда $u \equiv xy^3$, а $v \in \{x^3y^2, y^3x^2\}$, разбирается вполне аналогично. □

Лемма 2.10 *Если нильмногообразие полугрупп fi-2.5-перестановочно, то оно удовлетворяет одному из тождеств*

$$x^3y = x^2y^2, \tag{2.12}$$

$$x^3y = 0, \tag{2.13}$$

$$x^2y^2 = 0, \tag{2.14}$$

$$x_1x_2x_3x_4x_5 = 0. \tag{2.15}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — fi-2.5-перестановочное нильмногообразие полугрупп. Можно считать, что $W_{4,2}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, так как в противном случае $\mathcal{V}$ удовлетворяет любому из тождеств (2.12)–(2.14). В силу лемм 2.6 и 2.9 либо $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству (2.15), либо трансверсаль $W_{4,2}(\mathcal{V})$ транзитивна. Но если $\mathcal{V}$ не удовлетворяет ни одному из тождеств (2.12)–(2.14), то слова x^3y и x^2y^2 принадлежат различным орбитам трансверсали $W_{4,2}(\mathcal{V})$. □

Лемма 2.11 ([17], лемма 2.12) *Пусть $\mathcal{V}$ — нильмногообразие полугрупп, удовлетворяющее нетривиальному перестановочному тождеству длины* 3.

а) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из тождеств* (2.3) *или* (2.7)*, то оно удовлетворяет также тождеству $x^2yz = 0$.*

б) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству* (2.12)*, то оно удовлетворяет также тождеству $x^2y^2z = 0$.* □

Завершим теперь доказательство необходимости. Пусть $\mathcal{V}$ — fi-2.5-перестановочное нильмногообразие полугрупп. В силу леммы 2.3 $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}$, где π — одна из перестановок (12), (13), (23) и (123). Предположим сначала, что π — одна из перестановок (12) и (23). В силу леммы 2.5а) $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из тождеств (2.1)–(2.4), а в силу леммы 2.7а) — одному из тождеств (2.3) и (2.8)–(2.10). Если в $\mathcal{V}$ выполнено одно из тождеств (2.8) и (2.9), то мы получаем одну из систем тождеств (0.3) и (0.4) соответственно. Если в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (2.3), то в силу леммы 2.11а) $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (0.5). Если же в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (2.10) и одно из тождеств (2.1) и (2.2), то мы приходим к одной из систем тождеств (0.17) и (0.18) соответственно. Осталось рассмотреть случай, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству (2.4). В силу леммы 2.10 $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из тождеств (2.12)–(2.15). Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из тождеств (2.13)–(2.15), то мы получаем одну из систем тождеств (0.6), (0.7) и (0.19) соответственно. Если же в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (2.12), то в силу леммы 2.11б) $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (0.8).

Предположим теперь, что $\pi = (13)$. В силу леммы 2.5б) $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из тождеств (2.1) и (2.5)–(2.7), а в силу леммы 2.7б) — одному из тождеств (2.6), (2.8), (2.10) и (2.11). Если в $\mathcal{V}$ выполнено одно из тождеств (2.8) и (2.11), то мы получаем одну из систем тождеств (0.3) и (0.9) соответственно. Если в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (2.7), то в силу леммы 2.11а) $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (0.10). Если же в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (2.10) и одно из тождеств (2.1) и (2.5), то мы приходим к одной из систем тождеств (0.17) и (0.20) соответственно. Осталось рассмотреть случай, когда в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (2.6). В силу леммы 2.10 $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из тождеств (2.12)–(2.15). Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из тождеств (2.13)–(2.15), то мы получаем одну из систем тождеств (0.11), (0.12) и (0.21) соответственно. Если же в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (2.12), то в силу леммы 2.11б) $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (0.13).

Пусть, наконец, $\pi = (123)$. В силу леммы 2.10 $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из тождеств (2.12)–(2.15). Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из тождеств (2.13)–(2.15), то мы получаем одну из систем тождеств (0.14), (0.15) и (0.22) соответственно. Если же в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (2.12), то в силу леммы 2.11б) $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (0.16).

Необходимость доказана.

3 Доказательство теоремы: достаточность

В работах [10, 11] доказано, что всякое вполне простое многообразие fi-перестановочно. Поскольку $\mathcal{SL}$ является атомом решетки всех многообразий полугрупп, на всякой $\mathcal{SL}$-свободной полугруппе имеется не более двух вполне инвариантных конгруэнций. Ясно, что они перестановочны. Для доказательства достаточности осталось рассмотреть случай, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (0.3)–(0.22), где в системах (0.3)–(0.8) и (0.17)–(0.19) π имеет смысл, указанный в формулировке теоремы. Требуется доказать, что $\mathcal{V}$ fi-2.5-перестановочно.

Предположим сначала, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (0.3)–(0.16). Из леммы 3.4 работы [17] и ее доказательства вытекает, что в этом случае $\mathcal{V}$ наследственно однородно, все 0-трансверсали вида $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ конгруэнц-перестановочны, а все непустые трансверсали вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$ транзитивны. В силу леммы 1.11 $\mathcal{V}$ fi-2.5-перестановочно. Осталось рассмотреть многообразия, заданные системами тождеств (0.17)–(0.22).

Лемма 3.1 *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп, заданное одной из систем тождеств* (0.17)–(0.22) (*где в системах* (0.17)–(0.19) π *имеет смысл, указанный в формулировке теоремы*). *Тогда $\mathcal{V}$ наследственно однородно, все 0-трансверсали вида $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ сегрегированы и содержат не более трех орбит, а решетки конгруэнций всех орбит этих 0-трансверсалей содержат не более двух элементов.*

Доказательство. Несложные выкладки позволяют выписать все непустые трансверсали вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$ при $1 < m < n$. Это сделано во втором столбце табл. 1. Точки с запятой разделяют орбиты трансверсалей. Используя табл. 1 и лемму 1.9, легко установить, что многообразие $\mathcal{V}$ наследственно однородно. Пусть теперь $m, n \in \mathbb{N}$ и $m \leqslant n$. Если $W_{n,m}(\mathcal{V}) = \varnothing$, то $W^0_{n,m}(\mathcal{V}) = \{0\}$ и все требуемые утверждения очевидны. Поэтому далее можно считать, что $W_{n,m}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$. Если $m = 1$, то все требуемые утверждения вновь очевидны, поскольку 0-трансверсаль $W^0_{n,1}(\mathcal{V})$ состоит из двух одноэлементных орбит: $\{x_1^n\}$ и $\{0\}$. Предположим, что $1 < m < n$. Из табл. 1 видно, что в этом случае все непустые трансверсали вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$ содержат не более двух орбит, и потому все 0-трансверсали вида $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ содержат не более трех орбит. Из той же таблицы и леммы 1.2 вытекает, что все 0-трансверсали вида $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ сегрегированы. Наконец, из табл. 1 и леммы 1.6 вытекает, что решетки конгруэнций всех орбит этих 0-трансверсалей содержат не более двух элементов. Пусть, наконец, $m = n$. Ясно, что $\mathbf{S}_n$-множество $W^0_{n,n}(\mathcal{V})$ содержит две орбиты: $W_{n,n}(\mathcal{V})$ и $\{0\}$. Сегрегированность 0-трансверсали $W^0_{n,n}(\mathcal{V})$ вытекает теперь из леммы 1.2. Осталось убедиться в том, что трансверсаль $W_{n,n}(\mathcal{V})$ содержит не более двух конгруэнций. В силу следствия 1.1 достаточно проверить, что интервал $[\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}),\, \mathbf{S}_n]$ решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_n)$ содержит не более двух элементов. При $n \leqslant 2$ это очевидно, так как в этом случае вся решетка $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_n)$ содержит не более двух элементов. Пусть теперь $n = 3$. Каждая из систем тождеств (0.17)–(0.22) содержит нетривиальное перестановочное тождество длины 3. Следовательно, группа $\mathrm{Perm}_3(\mathcal{V})$ отлична от единичной группы. Остается учесть, что всякая собственная подгруппа группы $\mathbf{S}_3$ является коатомом решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_3)$. Пусть, наконец, $n \geqslant 4$. В силу леммы 2.8 группа $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ содержит одну из групп $\mathrm{Stab}_n(1)$ и $\mathrm{Stab}_n(n)$. Остается учесть тот общеизвестный факт, что все группы вида $\mathrm{Stab}_n(i)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, являются коатомами решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_n)$. □

<table>
<tr><th>$\mathcal{V}$ задано одной из систем тождеств</th><th>Непустые трансверсали вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$, где $1 < m < n$</th><th>Слова из транзитивных трансверсалей (с точностью до подобия)</th></tr>
<tr><td>(0.17) при $\pi \in \{(12), (23)\}$</td><td>$W_{3,2}(\mathcal{V}) = \{x^2y; xy^2, yx^2\}$</td><td>$x, x^2, x^3, xy, xyz$</td></tr>
<tr><td>(0.17) при $\pi = (13)$</td><td>$W_{3,2}(\mathcal{V}) = \{x^2y; xyx, yxy\}$</td><td>$x, x^2, x^3, xy, xyz$</td></tr>
<tr><td>(0.18) при $\pi \in \{(12), (23)\}$</td><td>$W_{3,2}(\mathcal{V}) = \{x^2y, y^2x; xy^2\}$</td><td>$x, x^2, x^3, xy, xyz$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(0.19) при $\pi = (12)$, (0.21), (0.22)</td><td>$W_{3,2}(\mathcal{V}) = \{x^2y, y^2x\}$</td><td rowspan="3">$x, x^2, x^3, x^4,$ $xy, xyz, xyzt,$ x^2y, x^2yz</td></tr>
<tr><td>$W_{4,2}(\mathcal{V}) = \{x^3y, y^3x; x^2y^2\}$</td></tr>
<tr><td>$W_{4,3}(\mathcal{V}) = \{x^2yz, y^2xz, z^2xy\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(0.19) при $\pi = (23)$</td><td>$W_{3,2}(\mathcal{V}) = \{x^2y, y^2x\}$</td><td rowspan="3">$x, x^2, x^3, x^4,$ $xy, xyz, xyzt,$ x^2y, xyz^2</td></tr>
<tr><td>$W_{4,2}(\mathcal{V}) = \{x^3y, y^3x; x^2y^2\}$</td></tr>
<tr><td>$W_{4,3}(\mathcal{V}) = \{xyz^2, xzy^2, yzx^2\}$</td></tr>
<tr><td>(0.20)</td><td>$W_{3,2}(\mathcal{V}) = \{x^2y, y^2x; xyx\}$</td><td>$x, x^2, x^3, xy, xyz$</td></tr>
</table>

Таблица 1: непустые трансверсали

Завершим доказательство достаточности. Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп, заданное одной из систем тождеств (0.17)–(0.22) (где в системах (0.17)–(0.19) π имеет смысл, указанный в формулировке теоремы). В силу леммы 3.1 и предложения 1.2 все 0-трансверсали вида $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ конгруэнц-2.5-перестановочны. Из табл. 1 видно, что при $1 < m < n$ среди непустых трансверсалей вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$ не более чем одна не является транзитивной. Поскольку непустые трансверсали вида $W_{n,1}(\mathcal{V})$ и $W_{n,n}(\mathcal{V})$ всегда транзитивны, мы получаем, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию б) леммы 1.11. Наконец, учитывая данные из второго столбца табл. 1 и тот факт, что в системы (0.17), (0.18) и (0.20) входит тождество $xyzt = 0$, а в системы (0.19), (0.21) и (0.22) — тождество $x_1x_2x_3x_4x_5 = 0$, легко выписать все (с точностью до подобия) слова, не равные 0 в $\mathcal{V}$ и принадлежащие транзитивным трансверсалям вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$. Это сделано в третьем столбце табл. 1. Из этих данных непосредственно вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию в) леммы 1.11. В силу этой леммы $\mathcal{V}$ fi-2.5-перестановочно.

Теорема полностью доказана. □

4 Следствия

Из доказанной выше теоремы и теоремы 1 работы [16] непосредственно вытекает

Следствие 4.1 *Многообразие полугрупп, не являющееся нильмногообразием, fi-перестановочно тогда и только тогда, когда оно fi-2.5-перестановочно.* $\square$

Это следствие интересно сопоставить со следующим фактом, непосредственно вытекающим из теоремы 1 работы [16] и ее доказательства: нильмногообразие полугрупп fi-перестановочно тогда и только тогда, когда оно fi-1.5-перестановочно.

В работе [18] доказано, что нильмногообразие имеет дистрибутивную решетку подмногообразий тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет одной из систем тождеств (0.3)–(0.16), где в системах (0.3)–(0.8) π имеет смысл, указанный в формулировке теоремы (более простое и короткое доказательство этого факта см. в [17]). Из этого результата и теоремы, доказанной в данной работе, вытекает

Следствие 4.2 *Если $\mathcal{V}$ — нильмногообразие полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий, то $\mathcal{V}$ fi-2.5-перестановочно.* $\square$

Напомним, что многообразие полугрупп называется *комбинаторным*, если оно не содержит нетривиальных групп.

Следствие 4.3 *Пусть $\mathcal{V}$ — fi-2.5-перестановочное многообразие полугрупп и выполнено по крайней мере одно из следующих двух условий:*

а) *$\mathcal{V}$ не является вполне простым многообразием;*

б) *$\mathcal{V}$ — комбинаторное многообразие.*

Тогда $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_3$.

Доказательство. а) Из теоремы и того факта, что решетка $L(\mathcal{SL})$ двухэлементна, вытекает, что достаточно рассмотреть многообразия, заданные системами тождеств (0.3)–(0.22) (где в системах (0.3)–(0.8) и (0.17)–(0.19) π имеет смысл, указанный в формулировке теоремы). Как уже отмечалось выше, в [18] показано, что если многообразие задано одной из систем тождеств (0.3)–(0.16), то решетка его подмногообразий дистрибутивна. Если же $\mathcal{V}$ задано одной из систем тождеств (0.17)–(0.22), то достаточно учесть предложения 1.1 и 1.3 и лемму 3.1.

б) Из теоремы видно, что всякое комбинаторное fi-2.5-перестановочное многообразие является либо многообразием связок, либо нильмногообразием. В первом случае достаточно учесть тот хорошо известный факт, что решетка всех многообразий связок дистрибутивна (см., например, [6]), а во втором — сослаться на уже доказанный п. а) данного следствия. $\square$

В связи со следствием 4.3 отметим следующий факт, непосредственно вытекающий из теоремы 1 работы [16] и ее доказательства: если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ fi-перестановочно и выполнено одно из условий а) и б) следствия 4.3, то решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна. Интересно также сопоставить следствие 4.3 со следующим результатом, полученным в [15]: если $\mathcal{V}$ — надкоммутативное многообразие полугрупп, то подкоммутативные вполне инвариантные конгруэнции на $\mathcal{V}$-свободных полугруппах 2.5-перестановочны тогда и только тогда, когда решетка надкоммутативных подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$ принадлежит $\mathbf{M}_3$.

Список литературы

[1] Б. М. Верников. *Многообразия полугрупп с мультипликативными ограничениями на вполне инвариантные конгруэнции их свободных объектов* // Докл. РАН. 2002. Т. 384, № 4. С. 446–448.

[2] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп.* II // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. № 10. (Матем., механ. Вып. 1.) С. 13–33.

[3] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Строение решеток многообразий нильполугрупп* // Изв. Урал. гос. ун-та. 2000. № 18. (Матем., механ. Вып. 3.) С. 34–52.

[4] Г. Гретцер. Общая теория решеток. М.: Мир. 1982.

[5] М. В. Сапир, Е. В. Суханов. *О многообразиях периодических полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 1981. № 4. С. 48–55.

[6] T. Evans. *The lattice of semigroup varieties* // Semigroup Forum. 1971. Vol. 2, № 1. P. 1–43.

[7] P. Lipparini. *n-permutable varieties satisfy non trivial congruence identities* // Algebra Universalis. 1995. Vol. 33, № 2. P. 159–168.

[8] R. N. McKenzie, G. F. McNulty, W. F. Taylor. Algebras. Lattices. Varieties. Vol. I. Monterey: Wadsworth&Brooks/Cole. 1987.

[9] E. Nelson. *The lattice of equational classes of semigroups with zero* // Canad. Math. Bull. 1971. Vol. 14, № 4. P. 531–534.

[10] F. J. Pastijn. *Commuting fully invariant congruences on free completely regular semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. Vol. 323, № 1. P. 79–92.

[11] M. Petrich, N. R. Reilly. *The modularity of the lattice of varieties of completely regular semigroups and related representations* // Glasgow Math. J. 1990. Vol. 32, № 2. P. 137–152.

[12] Gy. Pollák. *On the consequences of permutation identities* // Acta Sci. Math. (Szeged). 1973. Vol. 34. P. 323–333.

[13] E. J. Tully. *The equivalence, for semigroup varieties, of two properties concerning congruence relations* // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 70, № 3. P. 399–400.

[14] B. M. Vernikov. *On congruences of G-sets* // Comment. Math. Univ. Carol. 1997. Vol. 38, № 3. P. 603–613.

[15] B. M. Vernikov. *Distributivity, modularity, and related conditions in lattices of overcommutative semigroup varieties* // Semigroups with Applications, including Semigroup Rings. St Petersburg, 1999. P. 411–439.

[16] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Permutability of fully invariant congruences on relatively free semigroups* // Acta Sci. Math. (Szeged). 1997. Vol. 63, № 3–4. P. 437–461.

[17] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Commuting fully invariant congruences on free semigroups* // Contrib. General Algebra. 2000. Vol. 12. P. 391–417.

[18] M. V. Volkov. *Semigroup varieties with commuting fully invariant congruences on free objects* // Contemp. Math. 1992. Vol. 131, part 3. P. 295–316.

[19] M. V. Volkov, T. A. Ershova. *The lattice of varieties of semigroups with completely regular square* // Monash Conf. on Semigroup Theory in honour of G. B. Preston. World Scientific, Singapore, 1991. P. 306–322.

620083, г. Екатеринбург,
пр. Ленина, 51
Уральский госуниверситет
`e-mail: Boris.Vernikov@usu.ru`